Succession d'épreuves indépendantes
Loi binomiale

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition : Des expériences aléatoires sont indépendantes si l'issue de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

Exemple : Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules noires. On tire successivement deux boules *avec remise*.
Il y a bien succession de deux expériences indépendantes.
On obtient l'arbre pondéré de la figure 1.

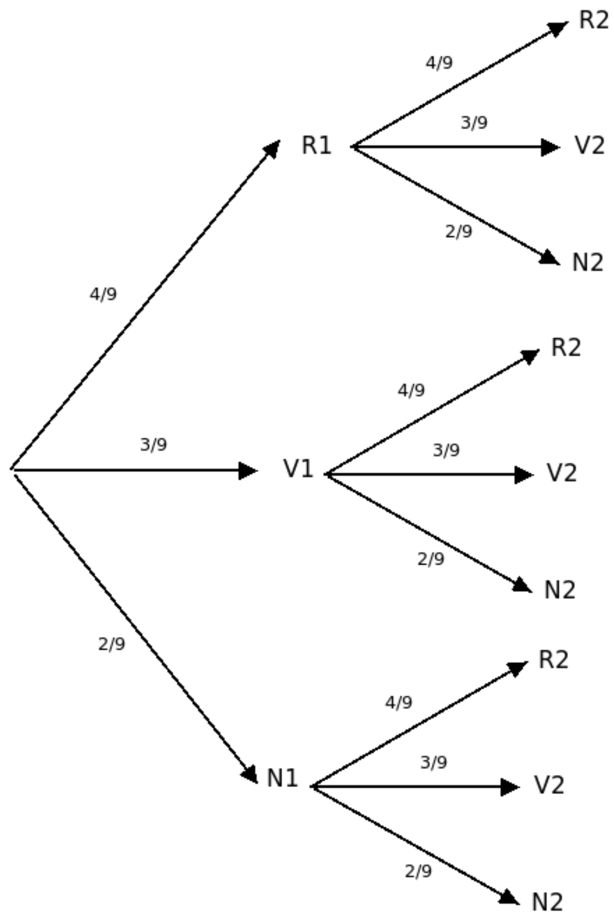


FIGURE 1 – Répétition d'expériences identiques et indépendantes

— La probabilité de tirer une boule verte puis une boule rouge est :

$$p\left((V1\,;\,R2)\right)=\frac{3}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$$

— La probabilité de tirer deux boules de même couleur est :

$$\begin{aligned} p &= p\left((R1\,;\,R2)\right)+p\left((V1\,;\,V2)\right)+p\left((N1\,;\,N2)\right)\\ &= \frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{16+9+4}{81}=\frac{29}{81}\end{aligned}$$

Remarques :

1. Si le tirage avait été *sans remise*, les expériences n'auraient pas été indépendantes (la répartition des boules du deuxième tirage dépend de la couleur de la première boule tirée).
2. Le résultat se généralise avec la propriété suivante.

Propriété : Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont Ω_1, Ω_2, …, Ω_n.
L'univers associé à cette succession de n épreuves indépendantes est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ et la probabilité de chaque issue $(x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_n)$ est :

$$p\left((x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_n)\right) = p\left(x_1\right) \times p\left(x_2\right) \times \cdots \times p\left(x_n\right)$$

Exercices : 2 page 369 ; 21 page 381 ; 33, 36, 37 page 383 ; 79, 80 page 387[1] [Magnard]

2 Loi de Bernoulli

Définition :
- On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve à deux issues possibles : un succès (noté S) ou un échec (noté $\overline{S}$).
- La loi de Bernoulli est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y prenant la valeur 1 si l'issue est un succès, et 0 si l'issue est un échec.
  On note $p = p\left(Y = 1\right) = p\left(S\right)$.
  p est appelé paramètre de la loi de Bernoulli.
- On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire Y suit la loi de Bernoulli.

Remarques : 1. On peut représenter la loi de Bernoulli par l'arbre pondéré de la figure 2.

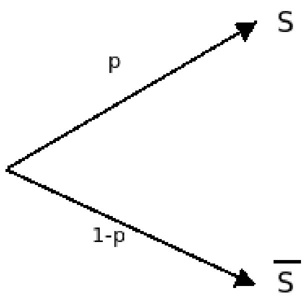


Figure 2 – Loi de Bernoulli

2. La loi de probabilité de Y est alors :

k	0	1
$p\left(Y = k\right)$	$1 - p$	p

Exemple : On lance un dé équilibré à six faces, les faces étant numérotés de 1 à 6.
On considère qu'il y a un succès lorsque le résultat du lancer est un 6, un échec sinon.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.
Elle correspond à la loi de Bernoulli :

k	0	1
$p\left(Y = k\right)$	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

Propriété : Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

$$E\left(Y\right) = p \qquad V\left(Y\right) = p\left(1 - p\right) \qquad \sigma\left(Y\right) = \sqrt{p\left(1 - p\right)}$$

Démonstration :

$$E\left(Y\right) = p\left(Y = 0\right) \times 0 + p\left(Y = 1\right) \times 1 = p \times 1 = p$$

1. Succession d'épreuves indépendantes

$$\begin{aligned} V(Y) &= p(Y=0)\times(0-E(Y))^2 + p(Y=1)\times(1-E(Y))^2 \\ &= (1-p)\times p^2 + p\times(1-p)^2 = p(1-p)[p+1-p] = p(1-p) \end{aligned}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{p(1-p)}$$

Exercices : 39, 40, 43, 45 page 383[2] [Magnard]

3 Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

3.1 Un exemple pour comprendre

Exemple : On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois de suite un dé à 6 faces non truqué. La variable aléatoire X représente le nombre de fois que le numéro 6 est sorti au cours de ces 3 lancers.

On peut modéliser cette expérience par une répétition indépendante de l'épreuve de Bernoulli de l'exemple du 2.

On obtient l'arbre pondéré de la figure 3.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

— $X=0$ correspond à l'événement $\left\{\left(\overline{S}\,;\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\right)\right\}$.
On a donc :

$$p(X=0) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

— $X=1$ correspond à l'événement $\left\{\left(S\,;\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\right)\,;\,\left(\overline{S}\,;\,S\,;\,\overline{S}\right)\,;\,\left(\overline{S}\,;\,\overline{S}\,;\,S\right)\right\}$.
On a donc :

$$p(X=1) = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = 3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

— $X=2$ correspond à l'événement $\left\{\left(S\,;\,S\,;\,\overline{S}\right)\,;\,\left(\overline{S}\,;\,S\,;\,S\right)\,;\,\left(S\,;\,\overline{S}\,;\,S\right)\right\}$.
On a donc :

$$p(X=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = 3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$X=3$ correspond à l'événement $\{(S\,;\,S\,;\,S)\}$.
On a donc :

$$p(X=3) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

3.2 Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

Définition : — On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n l'expérience consistant à répéter n fois de manière indépendantes la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

— La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité de la variable aléatoire X prenant prenant comme valeurs le nombre de succès (S) obtenus au cours des n épreuves du schéma de Bernoulli. Elle est notée $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

— On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque : Dans l'exemple du 3.1, on a donc un schéma de Bernoulli d'ordre 3.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$.

Exercices : 3, 4 page 371 et 50 page 384[3] [Magnard]

2. Loi de Bernoulli.
3. Schéma de Bernoulli.

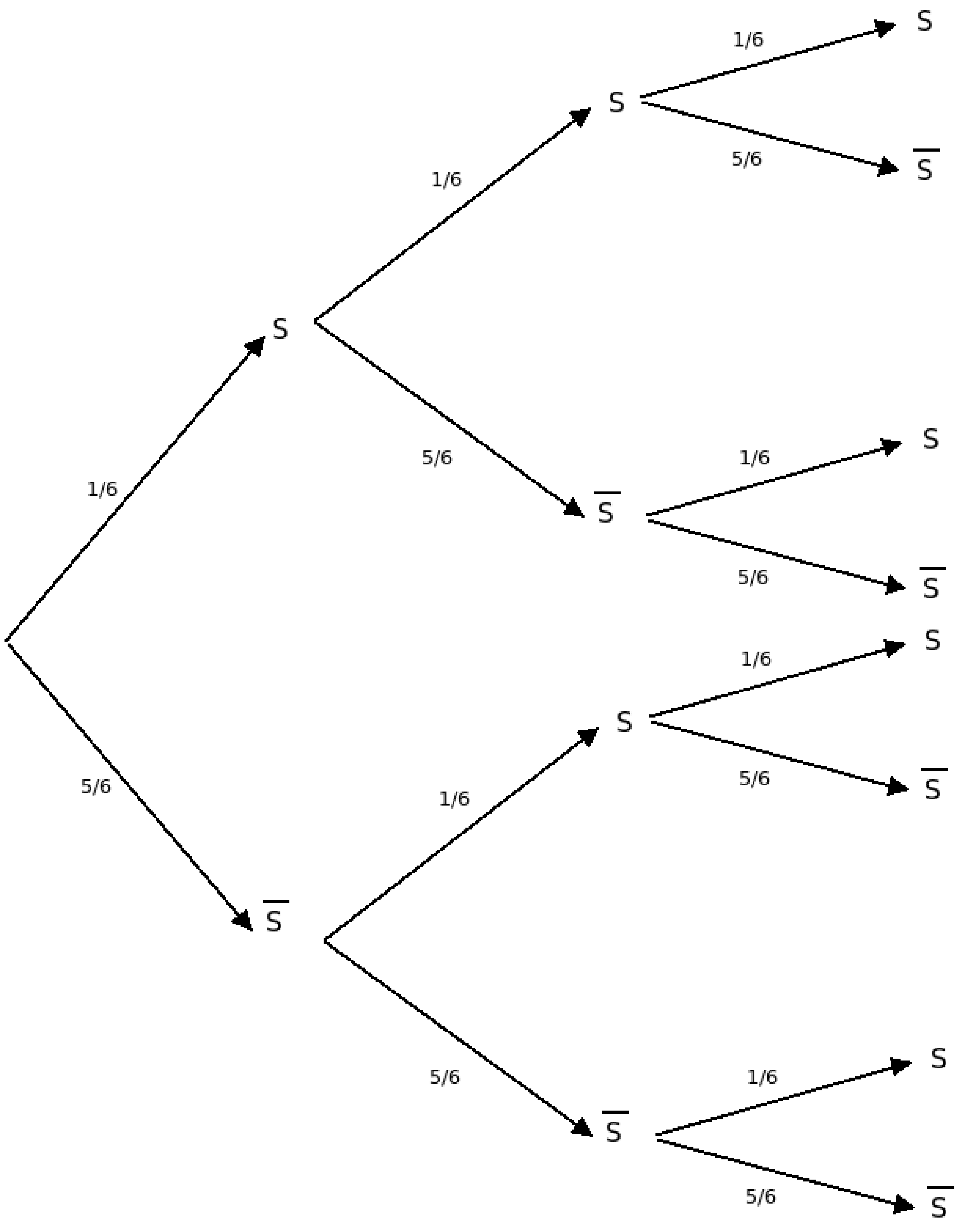


Figure 3 – Un exemple de schéma de Bernoulli

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.

1. Les valeurs de X sont $\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,n\}$
2. Pour tout $k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,n\}$:

$$p(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration
Le 1. est évident.
Sur un arbre représentant un schéma de Bernoulli, tout chemin menant à k succès comporte k succès et $(n-k)$ échecs. Sa probabilité est donc $p^k (1-p)^{n-k}$.
De plus, le nombre de chemins comportant k succès représente le nombre de façons différentes de placer k succès parmi n chemins, sans ordre (car tous les succès sont les mes). Il y en a donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.
On aboutit donc à $p(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque : On peut utiliser la calculatrice pour trouver calculer des probabilités suivant une loi binomiale. Voir le TP 1 page 398 [4] [Magnard].

Exercices : 5, 6 page 373 ; 53, 54, 56 page 384 [5] – 7, 8 page 373 et 58, 59, 61, 62 page 384 [6] –83, 84 page 388 [7] – 85, 86, 87, 89 page 388 [8]

3.3 Espérance, variance, écart-type

Propriété : (admis)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.
— Son espérance est : $E(X) = np$
— Sa variance est : $V(X) = np(1-p)$
— Son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Forme du diagramme en barres associés :
— le diagramme en barres associé à X est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$ (voir figure 4) ;

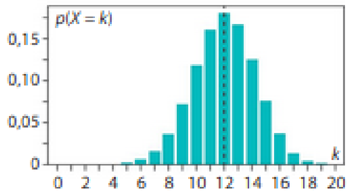


FIGURE 4 – Diagramme en barre de la loi $\mathcal{B}(20\,;\,0,6)$

— pour un même paramètre n, plus p est éloigné de 0,5 plus l'écart-type $\sigma(X)$ est petit et plus la cloche est « étroite » et « haute » (voir figure 5).

Exercices : 64, 66, 67, 69 page 385 [9] – 9, 10 page 375 et 70, 71 page 386 [10] – 90 page 388 et 91 page 389 [11] – 133 page 396 et 140 page 397 [12] [Magnard]

4. Calculatrice et loi binomiale.
5. Loi binomiale, utilisation de la formule.
6. Loi binomiale, utilisation de la calculatrice.
7. Exemples d'utilisation d'une loi binomiale.
8. Cas particulier de $p(X=0)$ et $p(X=n)$.
9. Espérance, variance d'une loi binomiale.
10. Utilisation du diagramme en « cloche »
11. Comparaisons de lois binomiales.
12. d'autres lois.

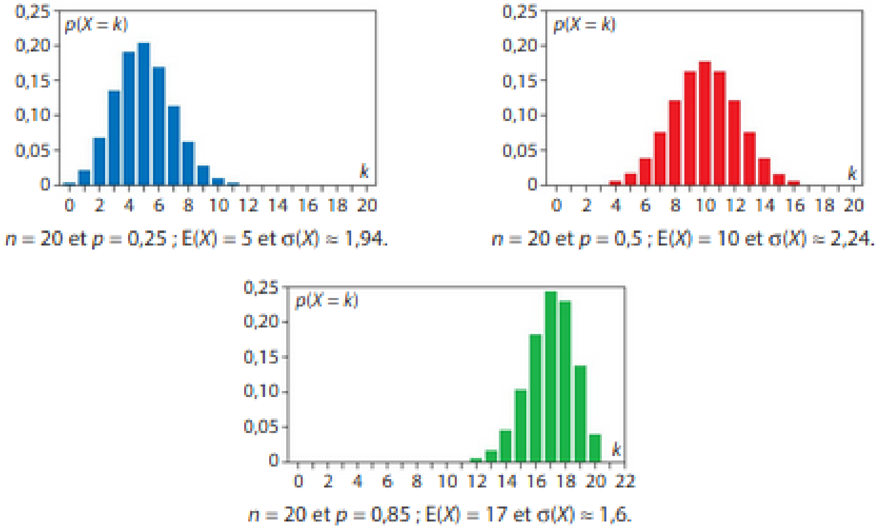


FIGURE 5 – Différents diagrammes en forme de « cloche »

3.4 Un exemple de recherche de seuil

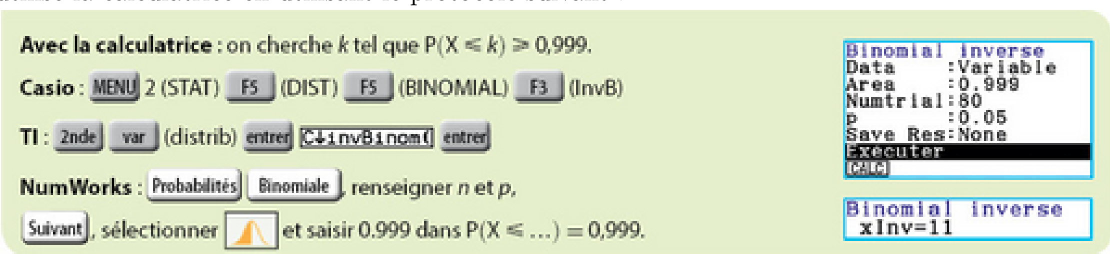
Soit $\alpha \in]0\,;\,1[$ et X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}\,(n\,;\,p)$.
Les calculatrices permettent de déterminer un seuil, c'est-à-dire déterminer la plus petite valeur de k tel que $P\,(X \leq k) > 1 - \alpha$.

Exemple :

Une société de vente en ligne de matériel de jardinage propose à ses clients des lots de 80 asperseurs.
Une étude a montré que 5 % des asperseurs vendus sont défectueux.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'asperseurs défectueux sur le lot de 80 asperseurs.
X suit la loi $\mathcal{B}\,(80\,;\,0,05)$.
La société souhaite déterminer le plus petit nombre d'asperseurs k telle que la probabilité que moins de k asperseurs soient défectueux soit supérieure à 99,9 %, c'est-à-dire chercher la plus petite valeur de k telle que :

$$P\,(X \leq k) > 0,999$$

On utilise la calculatrice en utilisant le protocole suivant :



On trouve qu'il faut au minimum 11 asperseurs.

Exercices : 11, 12 page 377 ; 15, 16 page 378 ; 17, 18 page 379 ; 72, 74 page 386 et 103, 105 page 390 [13] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020

3, 4, 6, 7

13. Recherche de seuils