Définitions – Propriétés

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé (ou, plus simplement, B sachant A) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarques : 1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :

$$p_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

2. $p_A(B)$ représente la probabilité de l'événement B dans l'univers A.

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

Remarque : Cette propriété découle directement de la définition. Elle permet de calculer la probabilité d'un événement représenté par une chemin sur un arbre de probabilités (voir figure 1).

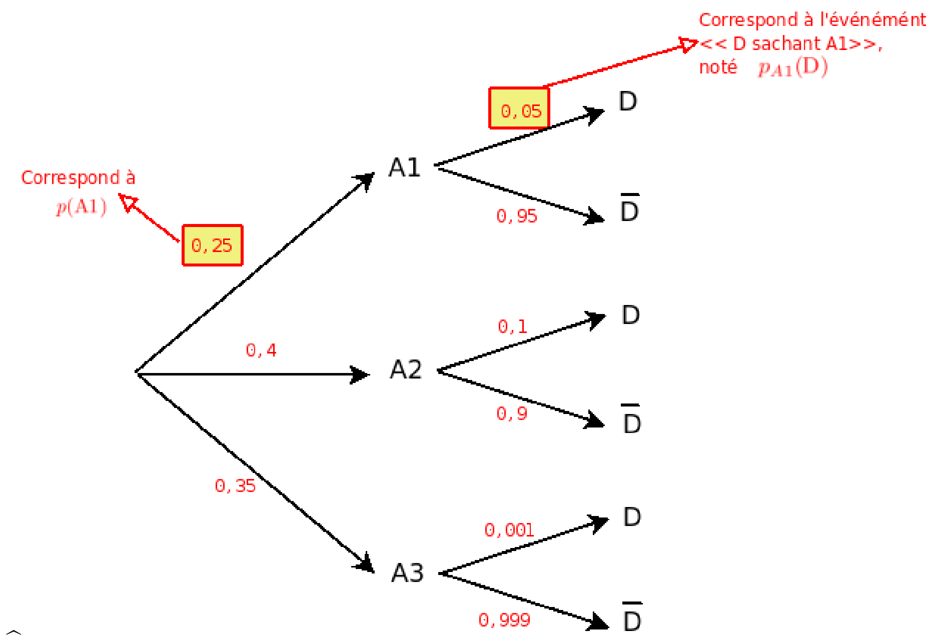

FIGURE 1 – Probabilités conditionnelles : utilisation d'un arbre

Définition : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux incompatibles et si $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Propriété 2 : Formule des probabilités totales
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω et B un événement. On a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n) \\ \text{où} \quad & p(B \cap A_i) = p(A_i) \times p_{A_i}(B) \end{aligned}$$

Remarque : On utilise souvent cette formule à l'aide d'un arbre pondéré, en suivant les règles suivantes :
— la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
— la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;
— la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités de tous les chemins qui y aboutissent (c'est la formule des probabilités totales).

Exemple : On reprend la situation de la figure 1.

— Formules des probanilités conditionnelles :

$$p(A_1 \cap D) = p(A_1) \times p_{A_1}(D) = 0,25 \times 0,05 = 0,0125$$

— Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A_1 \cap D) + p(A_2 \cap D) + p(A_2 \cap D) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(D) + p(A_2) \times p_{A_2}(D) + p(A_3) \times p_{A_3}(D) \\ &= 0,25 \times 0,05 + 0,4 \times 0,1 + 0,35 \times 0,001 = 0,05285 \end{aligned}$$

Événements indépendants

Définition : A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque : Attention ! Ceci n'a rien à voir avec des événements incompatibles. En effet, pour des événements incompatibles, $p(A \cap B) = 0$. on ne peut donc pas avoir $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

Propriété : A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$.

Remarques :
1. Ceci est dû au fait que $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$.
2. Deux événements sont donc indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de l'autre.

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On note :

l'événement A : « la carte est une dame »

l'événement B : « la carte est un cœur »

On a : $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
De plus, l'événement $A \cap B$ est « obtenir la dame de cœur » donc $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
On a $p(A) \times p(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = p(A \cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.