

Proportions

Évolutions en pourcentage

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

1	Proportion – Part en pourcentage	2
1.1	Ensemble de référence	2
1.2	Proportion de proportion	2
2	Pourcentages d'évolution	2
2.1	Différentes façons d'exprimer une variation	2
2.2	Lien en pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur	3
2.3	Évolutions successives	4
2.4	Évolution réciproque	4

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

1 Proportion – Part en pourcentage

1.1 Ensemble de référence

Question flash : Exercices 17 page 276¹ et 11 page 276² [Magnard]

Définition : Soit A un ensemble pris comme **ensemble de référence**.

Soit B une partie de l'ensemble A , c'est-à-dire $B \subset A$.

La **proportion** de B dans l'ensemble A est le nombre p tel que :

$$p = \frac{\text{nbre d'élèments de } B}{\text{nbre d'élèments de } A}$$

Exemple : On reprend l'énoncé de l'exercice 17 page 276

La proportion d'étudiants pratiquant le piano est $p = \frac{320}{500} = \frac{16}{25}$.

Remarques :

1. On peut exprimer cette proportion de différentes manières :

— sous forme d'une **fraction irréductible** : $p = \frac{16}{25}$

— sous forme **décimale** : $p = 0,64$

— sous forme d'un **pourcentage** : $p = \frac{64}{100} = 64\%$

2. Avant de calculer ou d'utiliser une proportion, il est donc *essentiel* de connaître l'ensemble de référence.

Exercices : 18, 19 page 276 et 44 page 278³ – 20, 21 page 276 ; 42, 43 page 278 et 66 page 280⁴ [Magnard]

1.2 Proportion de proportion

Activité : Activité 1 page 272⁵ [Magnard]

Propriété : On considère trois ensembles A , B et C emboîtés, c'est-à-dire $C \subset B \subset A$.

Soit p la **proportion de B dans l'ensemble A** .

Soit p' la **proportion de C dans l'ensemble B** .

Alors, la **proportion de C dans l'ensemble A** est $p \times p'$.

Exemple : Dans l'activité 1 page 270 :

— La proportion de femmes **parmi les adhérents** est $p = \frac{115}{200} = \frac{23}{40} = 0,575 = 57,5\%$;

— la proportion des femmes de 18 à 30 ans **parmi les femmes** est $p' = \frac{60}{115} = \frac{12}{23} \simeq 0,522 = 52,2\%$

La proportion des femmes de 18 à 30 ans parmi les adhérents est donc $p \times p' = \frac{23}{40} \times \frac{12}{23} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$

Question flash : Exercice 12 page 276⁶ [Magnard]

Exercices : 1, 2 page 274 ; 23, 24 page 276 et 46, 47 page 278⁷ [Magnard]

2 Pourcentages d'évolution

2.1 Différentes façons d'exprimer une variation

Activité : Activité 2 page 270⁸ [Magnard]

1. Détermination d'une proportion.
2. Utilisation d'une proportion.
3. Calculer une proportion.
4. Utiliser une proportion.
5. Proportion de proportion.
6. Proportion de proportion.
7. Proportion de proportion.
8. Variations absolue et relative.

Définition :

On considère une quantité passant de la valeur **initiale** V_1 à la valeur **finale** V_2 .

— La **variation absolue** est la quantité $\Delta V = V_2 - V_1$.

— La **variation relative** est la quantité (sans unité) :

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1}$$

— Le **pourcentage d'évolution** est la variation relative exprimée en pourcentage.

Remarques :

1. On peut avoir des augmentations de plus de 100 % mais pas de diminutions de plus de 100 % .
2. — Pour une hausse ($V_2 > V_1$), la variation absolue, la variation relative et l'évolution en pourcentage sont positifs ;
— Pour une baisse ($V_2 < V_1$), la variation absolue, la variation relative et l'évolution en pourcentage sont négatifs.

Exercices : 26, 27 page 277 et 48, 49, 50 page 278⁹ [Magnard]

2.2 Lien en pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur

Définition : Le **coefficient multiplicateur** est le nombre (sans unité) par lequel il faut multiplier V_1 pour obtenir V_2 . Il est noté CM . On a donc :

$$V_2 = CM \times V_1 \quad \text{soit} \quad CM = \frac{V_2}{V_1}$$

Remarques :

- Pour une hausse ($V_2 > V_1$), le coefficient multiplicateur est plus grand que 1 ;
- Pour une baisse ($V_2 < V_1$), le coefficient multiplicateur est compris entre 0 et 1.

Exemple : Un adolescent mesure $V_1 = 1,60$ m en arrivant au lycée. Au cours de l'année de Seconde, sa taille augmente de 5%. À la fin de la Seconde, sa taille sera :

$$V_2 = 1,60 + 1,60 \times \frac{5}{100} = 1,60 + 1,60 \times 0,05 = 1,68 \text{ m}$$

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} V_2 &= 1,60 + 1,60 \times \frac{5}{100} \\ &= V_1 + V_1 \times \frac{5}{100} \\ &= V_1 \left(1 + \frac{5}{100} \right) \end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur est donc : $CM = \frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$. Ce résultat se généralise :

Propriété :

- **Augmenter** une quantité de $t\%$ revient à la multiplier par $CM = 1 + \frac{t}{100}$.
- **Diminuer** une quantité de $t\%$ revient à la multiplier par $CM = 1 - \frac{t}{100}$.

Exemples :

- Une **augmentation** de **50 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{50}{100} = 1,5$.
- Une **augmentation** de **5 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
- Une **diminution** de **75 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{75}{100} = 0,25$.
- Une **diminution** de **5 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{5}{100} = 0,95$.

Remarques :

9. Variations absolues et relatives.

- Il est plus facile de calculer le résultat après évolution en utilisant le coefficient multiplicateur. En reprenant l'exemple précédent, on a $V_2 = CM \times V_1 = 1,05 \times 1,6 = 1,68$.
- La propriété précédente permet aussi de retrouver le pourcentage d'évolution à partir du coefficient multiplicateur :
 - $CM = 1,7$ correspond à une augmentation de 70 % ;
 - $CM = 1,07$ correspond à une augmentation de 7 % ;
 - $CM = 1,856$ correspond à une augmentation de 85,6 % ;
 - $CM = 3$ correspond à une augmentation de 200 % ;
 - $CM = 0,6$ correspond à une diminution de 40 % ;
 - $CM = 0,82$ correspond à une diminution de 18 % .

Questions flash : Exercices 13, 14 page 276¹⁰ [Magnard]

Exercices : 28, 29, 30, 31 page 277¹¹ – 33 page 277 ; 51, 52 page 278 ; 54 page 279 et 65, 67 page 280¹² [Magnard]

2.3 Évolutions successives

Activité : Activité 3 page 271¹³ [Magnard]

Propriété : Lors d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient.

$$V_1 \xrightarrow{CM_1} V_2 \xrightarrow{CM_2} V_3 \quad \text{alors} \quad CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$$

Remarque : Les pourcentages d'évolution ne s'additionnent jamais. Pour trouver l'évolution globale, il faut utiliser les coefficients multiplicateurs.

Exemple : Une quantité augmente de 10 % puis baisse de 30 %.

Le coefficient multiplicateur global sera $CM_{\text{global}} = 1,1 \times 0,7 = 0,77$, soit une baisse globale de 23 %.

Question flash : Exercice 15 page 276¹⁴ [Magnard]

Exercices : 5 page 274 ; 35, 36 page 277 ; 55, 56, 57 page 279 et 68, 69 page 280¹⁵ [Magnard]

2.4 Évolution réciproque

Activité : Activité 4 page 271¹⁶ [Magnard]

Définition : Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 , on appelle **taux d'évolution réciproque** le taux d'évolution permettant de passer de V_2 à V_1 .

Remarque : **Attention !** L'évolution réciproque d'une hausse de 5 % n'est pas une baisse de 5 %. En effet, le coefficient multiplicateur global sera :

$$CM_{\text{global}} = 1,05 \times 0,95 = 0,9975$$

Cela correspond donc à une baisse globale de 0,25 %. On n'est donc pas revenu à la valeur de départ.

Propriété : On considère une évolution de coefficient multiplicateur CM .

Le coefficient multiplicateur de l'**évolution réciproque** est :

$$CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{CM}$$

Question flash : Exercice 16 page 276¹⁷ [Magnard]

Exercices : 5, 6 page 275 ; 38, 39 page 277 et 60, 61 page 279¹⁸ [Magnard]

- Coefficient multiplicateur et évolution en pourcentage.
- Coefficient multiplicateur et évolution en pourcentage.
- Utilisation du coefficient multiplicateur.
- Évolutions successives, coefficient multiplicateur global.
- Évolutions successives.
- Évolutions successives.
- Évolutions réciproques.
- Taux d'évolution réciproque.
- Évolutions réciproques.

Références

[Magnard] Maths 2^{de}, MAGNARD, 2019

2, 3, 4