Notion de continuité

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/`

Activité : Activité 1 page 110 [1] [Magnard]

1 Notion de continuité

1.1 Limite finie en un réel a

Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I avec $a \in I$ ou a est une borne de I. Soit l un nombre réel.
On dit que f a comme limite l lorsque x tend vers a si, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour pour x suffisamment proche de a (voir figure 1).
On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = l$$

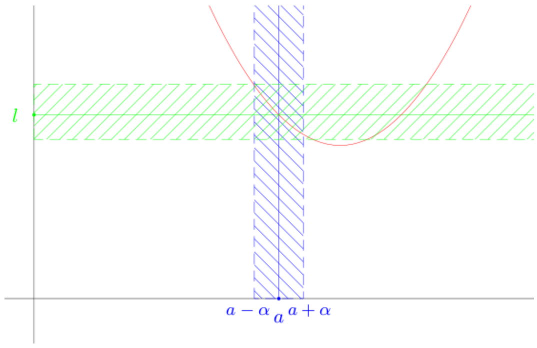

FIGURE 1 – Limite finie lorsque x tend vers le réel a

1.2 Définitions – Exemples

Définition 1 : Soit f une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque : Il ne suffit pas que la fonction soit définie en a pour qu'elle soit continue en a. Par exemple, la fonction partie entière (voir figure 2) est définie en 2 mais n'est pas continue en 2 : $E(2) = 2$ et $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) = 1$.

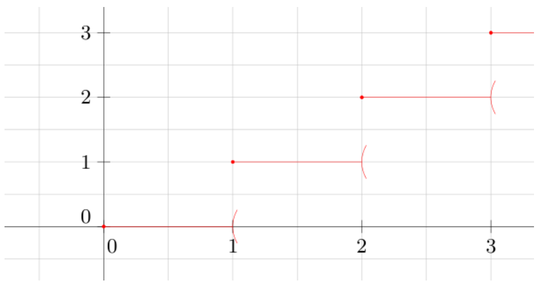

FIGURE 2 – Fonction partie entière

1. Découvrir la fonction partie entière.

Définition 2 : Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel a de l'intervalle I.

Remarque : Graphiquement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si on peut tracer sa représentation graphique « sans lever le crayon ».

Exemples : On admettra provisoirement les résultats suivants, qui seront prouvés par le théorème du 1.3.

1. Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
4. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Les fonctions obtenues par opérations sur les fonctions usuelles (somme, produit, quotient) sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
6. Les fonctions composées à partir des fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Exercices : 13 page 121[2] – 1, 2 page 113 ; 14, 16 page 121 ; 20, 21, 23 page 122 ; 48, 50, 52 page 125 et 71 page 131[3] [Magnard]

1.3 Cas des fonctions dérivables

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
Alors f est continue sur l'intervalle I.

Démonstration :
Soit $a \in I$. f est dérivable en a donc $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
On note g la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On a donc $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a)$.
De plus, $f(x) - f(a) = g(x) \times (x-a)$ d'où $f(x) = f(a) + g(x) . (x-a)$.
Or, $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a)$ et $\lim_{x \to a} (x-a) = 0$, donc $\lim_{x \to a} g(x) . (x-a) = 0$ et $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Par suite, la fonction f est continue en a.

Remarque : Attention ! La réciproque de cette propriété est FAUSSE.

— La fonction racine carrée est continue en zéro mais n'est pas dérivable en zéro, car la tangente en zéro est verticale (voir figure 3) ;

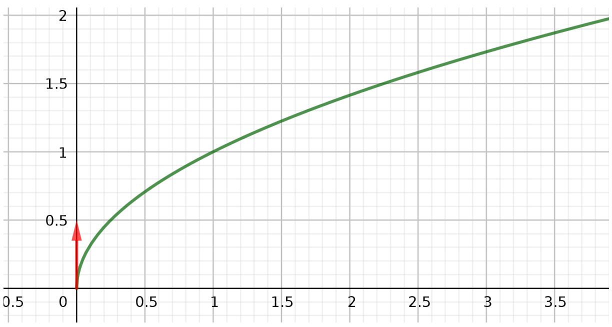

FIGURE 3 – La fonction racine carrée

— La fonction valeur absolue est continue en zéro mais n('est pas dérivable en zéro, car il n'y a pas de tangente à la courbe en $x = 0$ (voir figure 4).

Exercices : 15 page 121[4] – 3, 4 page 115 ; 26, 27 page 122 ; 53 page 125 et 72 page 131[5] [Magnard]

2. Continuité à partir d'un graphique.
3. Continuité et limites.
4. Continuité et dérivabilité, graphiquement.
5. Continuité et dérivabilité.

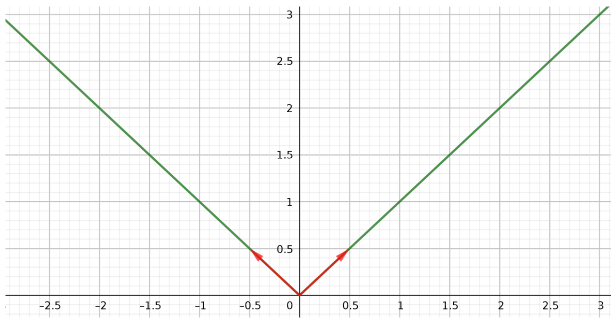

FIGURE 4 – La fonction valeur absolue

1.4 Une application de la continuité aux limites de suites

Activité : Activité 3 page 111[6] [Magnard]

Propriété : Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) a une limite finie l et si f est continue en l alors :

$$f(l) = l$$

Démonstration :
Comme f est continue en l, $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$.
Comme, de plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, par composition, on a : $\lim_{n\to=+\infty} f(u_n) = f(l)$.
De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
Donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $l = f(l)$.

Remarque : Cette propriété permet de déterminer la limite d'une suite lorsque l'on sait au préalable qu'elle est convergente ; par exemple, dans le cas des suites monotones bornées.

Exercices : 5, 6 page 115 ; 9, 10 page 118 ; 31, 32 page 123 ; 40, 41, 43 page 124 et 57 page 127[7] [Magnard]

2 Théorème des valeurs intermédiaires – Applications

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 : (admis)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$ (voir figure 5).

Remarque : L'hypothèse de la continuité est *essentielle*.
La fonction de la figure 6 n'est pas continue sur $[0\,;4]$ et, bien que $f(0) = 1$ et $f(4) = 5$, l'équation $f(x) = 2,5$ n'admet aucune solution.

Exercices : 18, 19 page 121[8] [Magnard]

6. Utiliser les notions de limite et de fonctions associées.
7. Continuité et limites de suites.
8. Théorème des valeurs intermédiaires, avec un graphique.

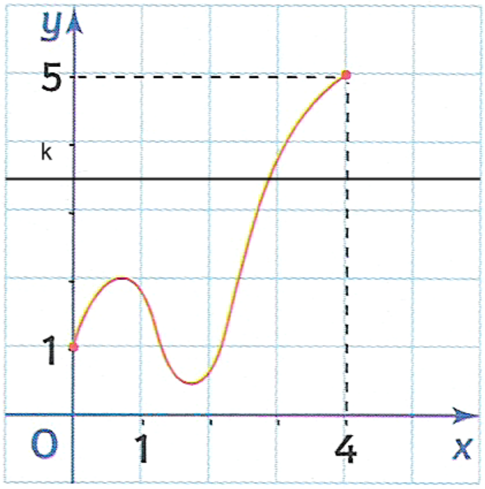

Figure 5 – Équation $f(x) = k$: cas d'une fonction continue

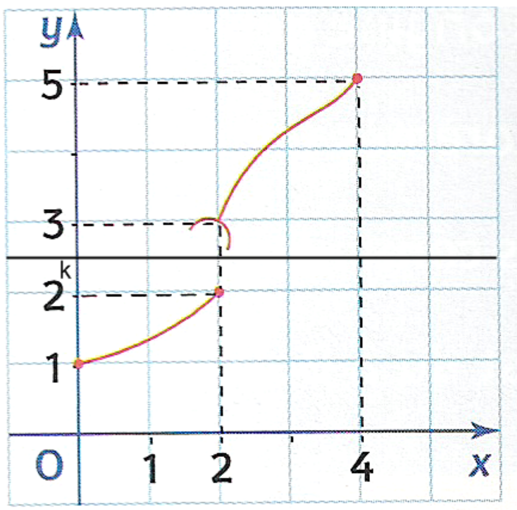

Figure 6 – Équation $f(x) = k$: cas d'une fonction non continue

2.2 Cas des fonctions continues strictement monotones

Théorème 2 : Cas des fonctions strictement monotones
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c de $[a\,;\,b]$ tel que $f(c) = k$

Démonstration :
L'existence de $c \in [a\,;\,b]$ est assurée par le théorème précédent (car f est continue).
De plus, s'il existe deux solutions c_1 et c_2, on a alors $f(c_1) = f(c_2) = k$.
La fonction f étant *strictement* monotone, on en déduit que $c_1 = c_2$. D'où l'unicité de la solution.

Exemple : Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une solution unique sur $[0\,;\,1]$.
Soit f la fonction définie sur $[0\,,\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
f est continue sur $[0\,;\,1]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.
De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}$ et $2 \in [0\,;\,1]$.
Donc, l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une solution unique sur $[0\,.;\,1]$.

Remarques :
1. Il n'est en général pas possible de déterminer de manière exacte cette solution. Par contre, des méthodes (comme la méthode de balayage ou de dichotomie) permettent d'en trouver une valeur approchée (voir exercices).
2. Ces deux théorèmes s'étendent aux cas où l'intervalle d'étude est de la forme $]a\,;\,b[$, $[a\,;\,b[$, $[a\,;+\infty[$, etc. Dans ce cas, pour conclure, il faut étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude pour conclure.

Exercices : 36 page 123 ; 54 page 126 [9] [Magnard]

Exemple : Montrer que l'équation $x^3 = 20$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.
g est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $20 \in]-\infty\,;\,+\infty[$.
Donc, l'équation $x^3 = 20$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Exercices : 33, 34, 35, 38 page 123 [10] – 7, 8 page 117 ; 37,39 page 123 ; 58 page 127 et 61 page 128 [11] – 12 page 119 ; 45, 46 page 124 ; 47 page 125 et 60 page 127 [12] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

2, 3, 4, 6

9. Théorème des valeurs intermédiaires, intervalle bornée.
10. A l'aide d'un tableau de variations.
11. Théorème des valeurs intermédiaires, cas général.
12. Avec une fonction auxiliaire.