1 Notion de continuité

1.1 Limite finie en un réel a

Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I avec $a \in I$ ou a est une borne de I. Soit l un nombre réel.
On dit que f a comme limite l lorsque x tend vers a si, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour pour x suffisamment proche de a (voir figure 1).
On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = l$$

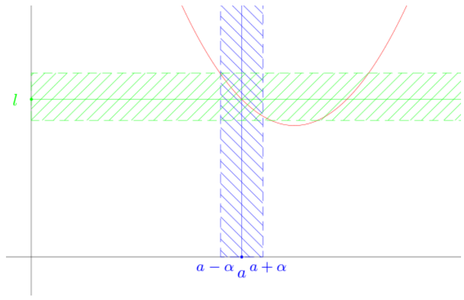

FIGURE 1 – Limite finie lorsque x tend vers le réel a

1.2 Définitions – Exemples

Définition 1 : Soit f une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque : Il ne suffit pas que la fonction soit définie en a pour qu'elle soit continue en a. Par exemple, la fonction partie entière (voir figure 2) est définie en 2 mais n'est pas continue en 2 : $E(2) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} E(x) = 1$.

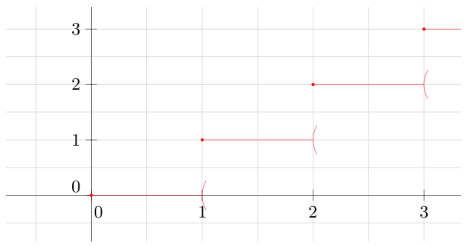

FIGURE 2 – Fonction partie entière

Définition 2 : Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel a de l'intervalle I.

Remarque : Graphiquement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si on peut tracer sa représentation graphique « sans lever le crayon ».

Exemples : On admettra provisoirement les résultats suivants, qui seront prouvés par le théorème du 1.3.

1. Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
4. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Les fonctions obtenues par opérations sur les fonctions usuelles (somme, produit, quotient) sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
6. Les fonctions composées à partir des fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.