Produit scalaire
dans l'Espace

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

---

1 Produit scalaire de l'Espace

1.1 Rappels sur le produit scalaire du plan

Différentes expressions du produit scalaire :

— *Forme triangulaire* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$ (voir figure 1)

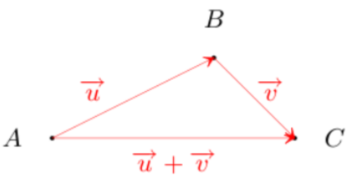


Figure 1 – Définition triangulaire du produit scalaire

— *Expression à l'aide de projections* : On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).
  — Si H et B sont du même côté de A (voir figure 2), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$;

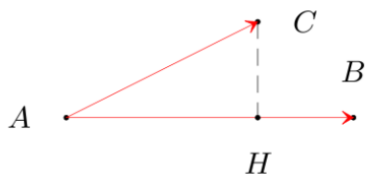


Figure 2 – Expression à l'aide de projections – Cas 1

  — Si H et B sont de part et d'autre de A (voir figure 3), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

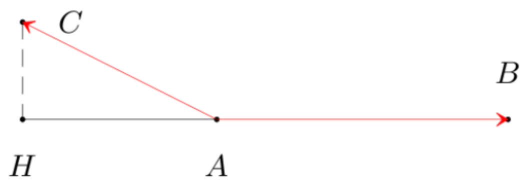


Figure 3 – Expression à l'aide de projections – Cas 2

— *Expression trigonométrique* : Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

— *Cas des vecteurs colinéaires* : Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on a :
  — Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$;
  — Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$.

Règles de calcul sur le produit scalaire :

— *Commutativité* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
  — *Bilinéarité* :
    1. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
    2. $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
  — *Carré scalaire* : $\overrightarrow{u}^{\,2} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

Produit scalaire et orthogonalité : Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Exercice : 1 page 307[1] [Magnard]

1. Produit scalaire du plan.

1.2 Extension de la définition à l'Espace

Activité : Activité 1 page 308[2] [Magnard]

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'Espace.
Il existe trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe toujours un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.
On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'Espace le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarques :
1. On a alors :
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$$
Cette égalité est bien *indépendante* du plan $\mathcal{P}$ choisi.
2. Quitte à se placer dans le plan $\mathcal{P}$, les différentes expressions du produit scalaire du 1.1 restent valables.
3. Les règles de calcul sur le produit scalaire (bilinéarité, carré scalaire) restent les mêmes que dans le plan.

Exercices : 2 page 311 et 15, 17 page 317[3] [Magnard]

1.3 Vecteurs orthogonaux

Définition : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'Espace.
Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Remarque : On conviendra que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs de l'Espace.

Propriété : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'Espace.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Remarque : Ce n'est qu'une utilisation de la forme trigonométrique du produit scalaire dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

2 Produit scalaire dans un repère de l'Espace

2.1 Expression analytique du produit scalaire

Propriété : On se place dans un repère $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath}\,;\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé de l'Espace.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration :
On a :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2xx' + 2yy' + 2zz'\right] = xx' + yy' + zz'
\end{aligned}$$

2. Découvrir le produit scalaire de l'Espace.
3. Calculs de produits scalaires dans l'Espace.

Remarque : On retrouve en particulier les résultats suivants, valables dans un repère orthonormé de l'Espace :

— Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

— Si $A\ (x_A\,;\, y_A\,;\, z_A)$ et $B\ (x_B\,;\, y_B\,;\, z_B)$ alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^{\,2}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exercices : 1 page 311 et 22, 23 page 318 [4] – 21 page 317 [5] – 20 page 317 et 24, 28 page 318 [6] – 3, 4 page 311 ; 30 page 318 ; 34 page 319 et 49, 50 page 320 [7] [Magnard]

2.2 Quelques formules sur le produit scalaire

— *Identités remarquables* :

1. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^{\,2} + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^{\,2} - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^{\,2} - \overrightarrow{v}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

— *Formules de polarisation* :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$
2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{4}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right]$

Exercice : En utilisant les identités remarquables, retrouver les deux formules de polarisation.

3 Orthogonalité de droites et de plans

3.1 Droites orthogonales

Définition : Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.
On dit que les droites d et d' sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Remarque : Attention ! Dans l'Espace, des droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et n'ont donc pas nécessairement de point d'intersection. Il faut bien faire la distinction entre des droites orthogonales et des droites perpendiculaires (qui ont, elles un point d'intersection).

Propriété : (admise) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Exercices : 13 page 315 ; 18 page 317 et 25 page 318 [8] [Magnard]

3.2 Droites perpendiculaires à un plan

Définition : Soit A le point d'intersection d'une droite Δ et d'un plan $\mathcal{P}$.
On dit que la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$ passant par A (voir figure 4).

Théorème : (admis) (aussi appelé « théorème de la porte »)
Si une droite Δ est perpendiculaire en A à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors elle est perpendiculaire à ce plan (voir figure 5).

4. Calculer un produit scalaire
5. Choisir une formule.
6. Vecteurs orthogonaux.
7. Déterminer des longueurs et des angles.
8. Droites orthogonales, droites perpendiculaires.

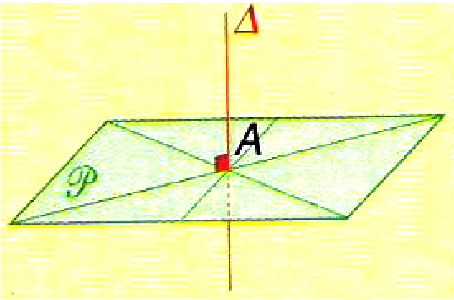


FIGURE 4 – Définition de l'orthogonalité

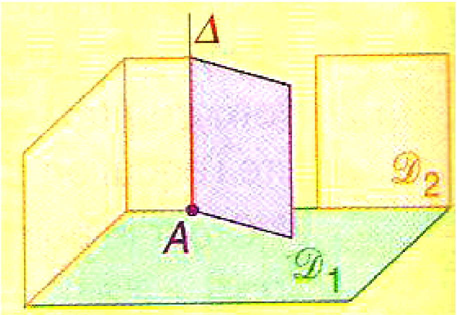


FIGURE 5 – Théorème de la porte

Remarque : On a aussi les deux résultats suivants :
- Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, ils sont parallèles.

4 Vecteur normal à un plan

Définition : On dit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est normal à un plan $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Remarques :
1. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
2. En utilisant le théorème de la porte, on a facilement le résultat suivant :

Propriété : Un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ non colinéaires.

Remarques :
- Pour montrer qu'une droite (AB) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
- Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Propriété : Caractérisation d'un plan
Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ passant par un point A.
M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

Démonstration :
Si $M \in \mathcal{P}$, alors (AM) est une droite de $\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. On a alors $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$, on note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. On a donc

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}=\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$$

Par suite, on a $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}=0$. De plus, comme H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
On a donc $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}=\pm HM\times\|\overrightarrow{n}\|$. Comme $\|\overrightarrow{n}\|\neq 0$, on a $HM=0$. Les points H et M sont donc confondus. Le point M est donc dans le plan $\mathcal{P}$.

Exercices : 62, 63 page 321 [9] – 9 page 314 et 50 page 320 [10] [Magnard]

5 Équation cartésienne d'un plan – Applications

5.1 Équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé

Propriété : Équation cartésienne d'un plan

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé de l'Espace.

1. Tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
2. Réciproquement, l'ensemble des points $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c non tous nuls est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M\,(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0\\ &\iff a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0\\ &\iff ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme voulue en posant $d=-ax_A-by_A-cz_A$.
Réciproquement, soit $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$.
On peut supposer que $a\neq 0$. Le point $A\left(-\frac{d}{a}\,;\,0\,;\,0\right)$ vérifie alors aussi $ax+by+cz+d=0$ [11]. On pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=ax+by+cz+d=0$$

Par suite : $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$ équivaut à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$, c'est-à-dire à M appartenant au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\,(1\,;\,2\,;\,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$:

9. Vecteur normal à un plan.
10. Aires et volumes.
11. Si $a=0$, il est aisé de trouver un autre point A vérifiant la relation car soit $b\neq 0$, soit $c\neq 0$.

Méthode 1 : $M\ (x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM}.\vec{n} & = & 0 \\ 1 \times (x-1) + (-1) \times (y-2) + (-1) \times (z-3) & = & 0 \\ x - 1 - y + 2 - z + 3 & = & 0 \\ x - y - z + 4 & = & 0 \end{array}$$

Méthode 2 : Comme $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, l'équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme :

$$x - y - z + d = 0$$

et comme, de plus, $A\ (1\,;\,2\,;\,3) \in \mathcal{P}$, on a $1 - 2 - 3 + d = 0 \iff -4 + d = 0 \iff d = 4$.
Une équation du plan $\mathcal{P}$ est donc :

$$x - y - z + 4 = 0$$

Exercices : 40 page 319 [12] – 5, 6 page 313 ; 16 page 317 ; 39, 41, 42 page 319 et 66, 67, 8 page 322 [13] – 43 page 319 [14] – 19 page 317 et 36, 37 page 319 [15] – 44 page 319 [16] [Magnard]

5.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Les résultats concernant les positions relatives d'une droite et d'un plan de l'Espace sont résumés dans le tableau 1.

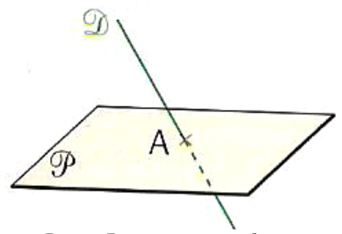
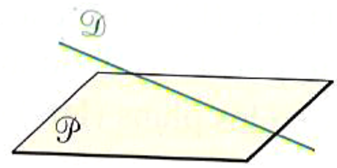
<table>
<tr><td colspan="3">Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$</td></tr>
<tr><td>sécants</td><td colspan="2">parallèles</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun</td><td>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun</td><td>$\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.</td></tr>
</table>

TABLE 1 – Positions relatives d'une droite et d'un plan

Remarque : $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
- Si $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants un un point.
- Si $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et si A est un point *quelconque* de $\mathcal{D}$:
  - Si $A \in \mathcal{P}$ alors la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
  - Si $A \notin \mathcal{P}$ alors la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

12. Vecteur normal d'un plan.
13. Détermination d'équations de plans.
14. Plan défini par trois points.
15. Plans perpendiculaires.
16. Distance d'un point à un plan.

Exercice résolu : Déterminer l'intersection éventuelle du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 3 \times 2 = 7 \neq 0$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont bien sécants un un point. Ce point vérifie :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 2(-2+t) - (1+t) + 3 \times 2t - 2 &= 0 \\ -4 + 2t - 1 - t + 6t - 2 &= 0 \\ 7t &= 7 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

et, par suite :

$$\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ est $A\,(-1\,;\,2\,;\,2)$.

Exercices : 11, 12 page 315 ; 52, 54 page 320 ; 55 page 321 et 71 page 322 [17] – 7, 8 page 313 ; 45 page 319 ; 48 page 320 et 74, 75 page 323 [18] [Magnard]

5.3 Intersection de deux plans

Les résultats concernant les positions relatives de deux plans de l'Espace sont résumés dans le tableau 2.

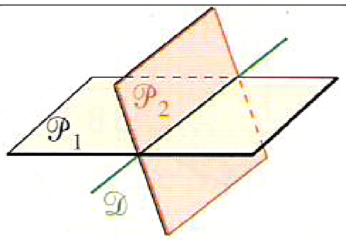
Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	**parallèles**	
	confondus	**strictement parallèles** ou **disjoints**
 leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	 leur intersection est un plan	 leur intersection est vide

TABLE 2 – Positions relatives de deux plans

17. Intersection d'une droite et d'un plan.
18. Distance d'un point à un plan.

Remarque : $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.

— Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A et *un point quelconque* de $\mathcal{P}$:
  — Si $A \in \mathcal{P}'$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ;
  — Si $A \notin \mathcal{P}'$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.
— Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.

Exercice résolu : Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-y-2z-1=0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $-x+4y+z-3=0$.
Étudier l'intersection éventuelle des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$. Pour déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on va considérer une des inconnues (ici z) comme le paramètre :

$$\begin{cases}2x-y-2z-1=0\\-x+4y+z-3=0\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-y=2t+1\\-x+4y=-t+3\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-2t-1\\-x+4\left(2x-2t-1\right)=-t+3\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x=7t+7\\y=2x-2t-1\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t+1\\y=2\left(t+1\right)-2t-1\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$$

Exercices : 56, 57, 59 page 321 [19] – 79, 83 page 324 [20] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

2, 3, 4, 6, 7, 8, 9

19. Intersection de deux plans.
20. Type BAC.