La fonction
logarithme népérien

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

---

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition – Courbe représentative

Propriété : Pour tout $x > 0$, l'équation $\mathrm{e}^t = x$ (d'inconnue t) admet une unique solution.
Cette solution est appelée logarithme népérien de x et est notée $\ln x$.

Démonstration :
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :
Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, il existe une unique solution à l'équation $\mathrm{e}^t = x$.

Exemples :
1. Comme $\mathrm{e}^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.
2. Comme $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, $\ln \mathrm{e} = 1$.

Définition : La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ qui, à tout $x > 0$ associe $\ln x$, c'est-à-dire l'unique réel dont l'exponentielle est x.

Théorème : Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$y = \ln x \iff x = \mathrm{e}^y$$

Démonstration :
Si $y = \ln x$, alors, par définition, y est l'unique réel dont l'exponentielle est x, d'où : $\mathrm{e}^y = x$.
Réciproquement, si $x = \mathrm{e}^y$, $\ln x = \ln(\mathrm{e}^y)$, c'est donc l'unique réel dont l'exponentielle est e^y. Cet unique réel ne peut être que y. On a donc : $\ln x = y$.

Remarques :
1. En particulier, on a montré que :
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
   - Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. On dit que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont des fonctions réciproques. Leurs courbes sont alors symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir figure 1).
3. Grâce à la courbe représentative de la fonction logarithme, on peut conjecturer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Exercices : 23 page 183 [1] [Magnard]

1.2 Sens de variation – Application

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :
Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a < b$.
Comme $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln b}$, on a : $\mathrm{e}^{\ln a} < \mathrm{e}^{\ln b}$ et, par suite, $\ln a < \ln b$.
La fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Conséquences :
1. Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$:
   - $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.
   - $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.
2. Pour tout $x > 0$:
   - $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$.
   - $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$.
   - $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$.

1. Ensembles de définition.

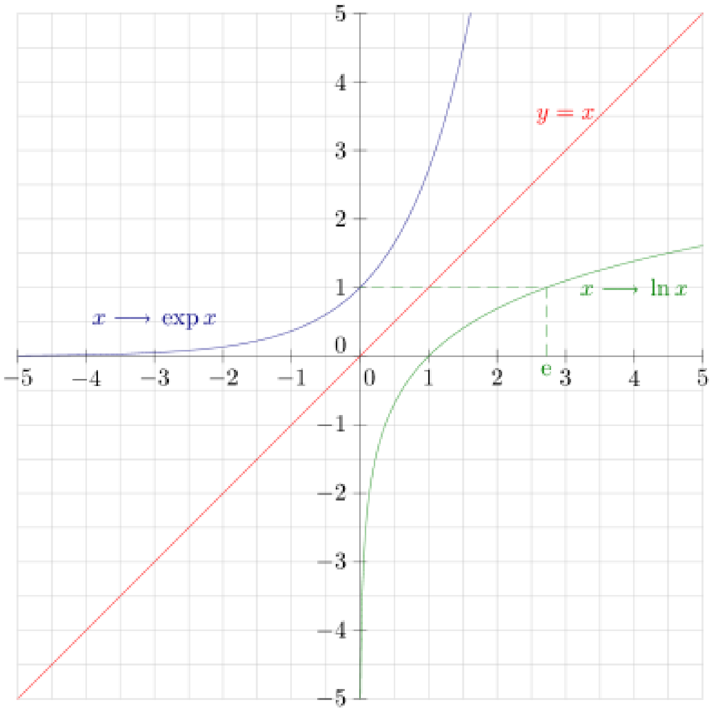

FIGURE 1 – Fonctions réciproques : ln et exp

Remarque : La première partie de cette propriété permet de résoudre des équations ou inéquations comportant des logarithmes. La deuxième partie donne le signe de $\ln x$.

Exemples : Résolution d'équations et d'inéquations

1. Résoudre l'équation $\ln(5-2x) = 1$:
   Il faut que $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.
   Cette équation équivaut à $\ln(5-2x) = \ln \mathrm{e}$. On en déduit que $5 - 2x = \mathrm{e}$, c'est-à-dire $x = \frac{5-\mathrm{e}}{2}$.
   Cette valeur est bien dans l'intervalle $\left]-\infty\,; \frac{5}{2}\right[$ donc $S = \left\{\frac{5-\mathrm{e}}{2}\right\}$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(5-2x) < 3$:
   Il faut que $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.
   Cette équation équivaut à $\ln(5-2x) < \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$. On en déduit que $5 - 2x < \mathrm{e}^3$, c'est-à-dire $x > \frac{5-\mathrm{e}^3}{2}$.
   Comme de plus on doit avoir $x \in \left]-\infty\,; \frac{5}{2}\right[$, on a $S = \left]\frac{5-\mathrm{e}^3}{2}\,; \frac{5}{2}\right[$.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{x+2} = 5$:
   Cette équation équivaut à $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^{\ln 5}$. On en déduit que $x + 2 = \ln 5$, c'est-à-dire $x = -2 + \ln 5$.
   On a donc $S = \{-2 + \ln 5\}$.

Exercices : 1, 2, 3, 4 page 173 et 29, 30, 31, 35 page 184 [2] [Magnard]

1.3 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Théorème 1 : Propriété fondamentale

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

2. Équations et inéquations comportant logarithmes et/ou exponentielles.

Démonstration :
$e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$.
On a donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$ et, donc, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Théorème 2 : Soient a, b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$
4. $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Démonstration :
1. D'après le théorème 1 : $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{a}$.
De plus, $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$ d'où $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.
2. D'après le théorème 1 : $\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Le résultat se montre aisément par récurrence pour $n \geq 0$.
Pour $n < 0$, il suffit d'utiliser le résultat du 2. pour conclure.
4. $\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right] = \ln a$ et, d'après 3. ,$\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right] = 2\ln\sqrt{a}$. On obtient donc $2\ln\sqrt{a} = \ln a$, soit $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Remarque : Ce théorème est souvent utilisé pour simplifier des expressions ou pour résoudre des équations ou inéquations (voir exercices). La partie 3. du théorème 2 peut aussi être utilisée pour des suites géométriques.

Exercice : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.
A partir de quel indice n a-t-on $u_n \leq 10^{-3}$?

On a $u_n = u_0 \times q^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$. On doit donc résoudre l'inéquation $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$.
Comme tous les nombres sont strictement positifs, cette équation est équivalente à $\ln\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \ln 10^{-3}$, c'est-à-dire : $n \ln\frac{4}{5} \leq -3\ln 10$.
Comme de plus $\frac{4}{5} < 1$, $\ln\frac{4}{5} < 0$ donc on obtient $n \geq \frac{-3\ln 10}{\ln\frac{4}{5}}$.
A la calculatrice, on trouve que $\frac{-3\ln 10}{\ln\frac{4}{5}} \simeq 30,96$ donc, le plus petit indice est $n = 31$.

Exercices : 5, 6 page 175 et 39, 40, 41, 45 page 184 [3] – 21 page 183 et 36, 37, 38 page 184 [4] – 27 page 183 et 51, 52 page 185 [5] – 7, 8 page 175 et 47, 48 page 184 [6] – 42 page 184 et 81, 82 page 189 [7] [Magnard]

2 Dérivation, sens de variation

2.1 Dérivée de la fonction ln

Théorème : La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration (partielle) :
On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on pose $f(x) = e^{\ln x}$.
On a déjà vu que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x$ et donc $f'(x) = 1$.

3. Simplification d'expressions.
4. Résolutions d'équations et d'inéquations.
5. Positions relatives de courbes.
6. Application aux suites géométriques.
7. Fonction ln et suites.

On peut aussi dériver la fonction f comme une fonction composée : f est de la fonction e^u avec $u(x) = \ln x$.
On a donc $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)} = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln x} = \ln'(x) \times x = x\ln'(x)$.
On a donc, pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $x\ln'(x) = 1 \Longleftrightarrow \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Remarques :

1. Comme pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\dfrac{1}{x} > 0$, on retrouve le fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
2. En admettant provisoirement les limites de la fonction logarithme népérien, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty$
	$\|\|$ $-\infty$		

3. La courbe représentative de la fonction ln est donnée sur la figure 2. On peut remarquer qu'elle admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

FIGURE 2 – Courbe représentative de la fonction ln

Exercices : 53 page 185 [8] – 11, 12 page 177 ; 54, 55, 56 page 185 et 67 page 186 [9] – 9, 10 page 177 et 49, 50 page 185 [10] [Magnard]

2.2 Dérivée de $\ln u$, où u est une fonction

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

8. Calcul de dérivées.
9. Étude de fonctions.
10. Tangentes.

Remarques : 1. C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

2. En particulier, comme $u(x)$ est strictement positive, f' est du même signe que u' .

Exercices : 15, 16 page 179 ; 22 page 183 et 61, 62 page 185 [11] – 19, 20 page 181 [12] – 72 page 187 [13] [Magnard]

3 Limites et fonction logarithme

3.1 Limites de la fonction logarithme népérien

Propriété :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Démonstration :

Il s'agit de montrer que, pour tout $M > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que, si $x > x_0$, $\ln x > M$.
Or $\ln x > M \iff x > \mathrm{e}^M$ donc, en posant $x_0 = \mathrm{e}^M$, on obtient le résultat voulu.
Par suite, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Pour la limite en 0^+, on pose $X = \frac{1}{x}$. On a alors :

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x} = -\ln X$$

Or, $\lim_{x \to 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Remarque : On trouvera les limites des fonctions de la forme $\ln u$ en utilisant les règles habituelles de limites de fonctions composées.

Exercices : 58 page 185 [14] – 63 page 186 et 73, 76 page 188 [15] – 75 page 188 [16] – 84, 85 page 190 [17] [Magnard]

3.2 Croissance comparée

Théorème :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$$

Démonstration :

On pose $X = \ln x$. On a alors $x = \mathrm{e}^X$ et $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{\mathrm{e}^X}$.
De plus, $\lim_{x \to +\infty} X = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$.

On pose ensuite $X = \frac{1}{x}$. On a alors $x = \frac{1}{X}$ et $x \ln x = \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln X}{X}$.
De plus, $\lim_{x \to 0^+} X = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^+$ donc $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$.

Remarques :

1. On peut montrer de même que, pour tout $n \geq 2$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0^-$.
2. Ces théorèmes vont permettre de lever des indéterminations pour des limites de fonctions faisant intervernir le logarithme népérien, en utilisant les méthodes habituelles sur les limites.

11. Calcul de dérivées.
12. Étude de fonctions.
13. Détermination de fonction.
14. Calcul de limites.
15. Étude de fonctions.
16. Détermination de fonctions.
17. ln et suites.

Exercices : 13, 14 page 179 ; 25 page 183 et 57, 59 page 185[18] – 65, 66 page 186 ; 74 page 188 ; 94 page 192 et 107, 109 page 195[19] – 69 page 187 et 106 page 195[20]– 79, 80 page 189[21] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

2, 3, 4, 5, 6, 7

18. Calcul de limites.
19. Études de fonctions.
20. Détermination de fonctions.
21. Fonction ln et suites.