Calcul algébrique
Résolution d'équations

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

1 Équations se ramenant à un produit nul

1.1 Cas d'un produit nul

Théorème 1 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si un au moins des facteurs est nul.

Exemple : Résoudre $(3x+1)(x-5)=0$.

$$\begin{array}{rcr} 3x+1=0 & \text{ou} & x-5=0 \\ x=-\dfrac{1}{3} & & x=5 \end{array}$$

$$S=\left\{-\tfrac{1}{3}\,;\,5\right\}$$

Exercices : 7 page 98 ; 44 page 101 ; 74 page 103[1] [Magnard]

Remarque : Nous allons utiliser cette méthode pour résoudre des équations plus complexes. Mais pour cela, il sera nécessaire de *transformer* les expressions en les factorisant, c'est-à-dire en transformant les sommes en produits.

1.2 Factoriser à l'aide d'un facteur commun

On a déjà utilisé la distributivité de la multiplication sur l'addition pour développer des expressions :

$$A(B+C)=AB+AC$$

Si l'on écrit cette égalité dans l'autre sens, elle devient une technique de factorisation, si l'on détermine un facteur commun (ici A) :

$$AB+AC=A(B+C)$$

Exemples :

1. $A=3(2+3x)-(5+2x)(2+3x)$

$$\begin{aligned} A &= 3(2+3x)-(5+2x)(2+3x) \\ &= (2+3x)[3-(5+2x)] \\ &= (2+3x)(3-5-2x) \\ &= (2+3x)(-2-2x) \end{aligned}$$

2. $B=(2-5x)^2-(2-5x)(1+x)$

$$\begin{aligned} B &= (2-5x)^2-(2-5x)(1+x) \\ &= (2-5x)(2-5x)-(2-5x)(1+x) \\ &= (2-5x)[(2-5x)-(1+x)] \\ &= (2-5x)(2-5x-1-x) \\ &= (2-5x)(1-6x) \end{aligned}$$

Exercices : 36, 37 page 100 et 62 page 102[2] [Magnard]

1.3 Factoriser à l'aide d'identités remarquables

Rappel : Soient a et b deux réels. Alors :

Carré d'une somme : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Carré d'une différence : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Différence de deux carrés : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

1. Produit nul
2. Factoriser à l'aide d'un facteur commun

Remarque : Nous avons pour l'instant utilisé ces identités remarquables pour *développer*, en les lisant *de la gauche vers la droite*. En les lisant maintenant de la droite vers la gauche, elles vont nous permettre de factoriser.

Exemples :

1. $A = x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x-1)^2$
2. $B = 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x-3)^2$
3. $C = 9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x-2)(3x+2)$
4. $D = (3x+1)^2 - 49 = (3x+1)^2 - 7^2 = [(3x+1)+7][(3x+1)-7] = (3x+1+7)(3x+1-7) = (3x+8)(3x-6)$

Exercices : 38 page 100 et 63, 66 page 102 [3] – 3, 4 page 97 ; 39 page 100 ; 65 page 102 et 118 page 107 [4] [Magnard]

1.4 Équations se ramenant à un produit nul

Exemples :

1. Résoudre $x^2 - 4x + 3 = x + 3$.

$$\begin{array}{rcl}
x^2 - 4x + 3 & = & x + 3 \\
x^2 - 4x + 3 - x - 3 & = & 0 \\
x^2 - 5x & = & 0 \\
x(x-5) & = & 0 \\
x = 0 & \text{ou} & x - 5 = 0 \\
 & & x = 5
\end{array}$$

$$S = \{0\,;\,5\}$$

2. Résoudre $(2x+1)^2 = 16$

$$\begin{array}{rcl}
(2x+1)^2 & = & 16 \\
(2x+1)^2 - 16 & = & 0 \\
(2x+1)^2 - 4^2 & = & 0 \\
[(2x+1)+4][(2x+1)-4] & = & 0 \\
(2x+1+4)(2x+1-4) & = & 0 \\
(2x+5)(2x-3) & = & 0 \\
2x+5 = 0 & \text{ou} & 2x - 3 = 0 \\
2x = -5 & & 2x = 3 \\
x = -\dfrac{5}{2} & & x = \dfrac{3}{2}
\end{array}$$

$$S = \left\{-\tfrac{5}{2}\,;\,\tfrac{3}{2}\right\}$$

Méthode :
1. Se ramener à $P(x) = 0$.
   (Tout regrouper dans le premier membre)
2. Factoriser $P(x)$.
   (Pour se ramener à un produit nul)
3. Employer le **Théorème 1** et conclure.

3. Factoriser à l'aide d'une identité remarquable
4. Factorisations diverses.

Remarque : On aurait aussi pu résoudre la deuxième équation de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} (2x+1)^2 & = & 16 \\ (2x+1)^2 & = & 4^2 \\ 2x+1=-4 & \text{ou} & 2x+1=4 \\ 2x=-5 & & 2x=3 \\ x=-\dfrac{5}{2} & & x=\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$$S=\left\{-\tfrac{5}{2}\,;\,\tfrac{3}{2}\right\}$$

Attention lors de l'utilisation de cette méthode, il ne faut pas oublier qu'il y a deux nombres dont le carré est 16 : 4 et -4.

Exercices : 8, 9, 10 page 98 ; 46, 48 page 101 et 75 page 103 [5] – 76, 78, 80, 82, 83 page 103 [6] – 106, 107, 109 page 106 [7] [Magnard]

2 Équations se ramenant à un quotient nul

2.1 Cas d'un quotient nul

Question flash : 27, 28 page 100 [8] [Magnard]

Théorème 2 : Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

Exemple : Résoudre $\dfrac{3x+1}{x-5}=0$.

Il faut que $x-5\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq 5$.
On se ramène alors en utilisant le **Théorème 2** à $3x+1=0$, soit $x=-\frac{1}{3}$.
La valeur obtenue étant différente de la valeur interdite 5, on a $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Exercices : 11 page 99 ; 50 page 101 et 88 page 104 [9] – 90 page 104 [10] [Magnard]

Remarque : Nous allons utiliser cette méthode pour résoudre des équations plus complexes. Mais pour cela, il sera nécessaire de *transformer* les expressions en les mettant sous le même dénominateur.

2.2 Expressions algébriques comportant des quotients

Rappels :

— On ne peut additionner des fractions que si elles ont le même dénominateur :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

— pour simplifier des fractions, il faut le même facteur multiplicatif au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{k\times a}{k\times b}=\frac{a}{b}$$

Exemples : Mettre sous le même dénominateur les expressions suivantes :

5. Équations se ramenant à un produit.
6. Application aux fonctions.
7. Exercices-bilan.
8. Équations quotient nul.
9. Résolutions d'équations quotients.
10. Programme Python.

1. $A = 5 + \dfrac{1}{2x+10}$
   Il faut que $2x + 10 \neq 0$, c'est-à-dire $2x \neq -10$ et enfin $x \neq -5$.

$$\begin{aligned} A &= 5 + \frac{1}{2x+10} \\ &= \frac{5(2x+10)}{2x+10} + \frac{1}{2x+10} \\ &= \frac{5\,(2x+10)+1}{2x+10} \\ &= \frac{10x+50+1}{2x+10} = \frac{10x+51}{2x+10} \end{aligned}$$

2. $B = 10 - \dfrac{x+2}{x-3}$
   Il faut que $x - 3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$.

$$\begin{aligned} B &= 10 - \frac{x+2}{x-3} \\ &= \frac{10(x-3)}{x-3} - \frac{x+2}{x-3} \\ &= \frac{10\,(x-3)-(x+2)}{x-3} \\ &= \frac{10x-30-x-2}{x-3} = \frac{9x-32}{x-3} \end{aligned}$$

3. $C = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+4} + 7$
   Il faut que $x \neq 0$ et que $x + 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $x \neq -4$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x} - \frac{2}{x+4} + 7 \\ &= \frac{1 \times (x+4)}{x(x+4)} - \frac{2x}{x\,(x+4)} + \frac{7x\,(x+4)}{x\,(x+4)} \\ &= \frac{x+4-2x+7x\,(x+4)}{x\,(x+4)} \\ &= \frac{-x+4+7x^2+28x}{x\,(x+4)} = \frac{7x^2+27x+4}{x\,(x+4)} \end{aligned}$$

Remarques :

1. Lors de la mise sous le même dénominateur, attention aux signe moins devant une fraction (voir exemple 2).
2. Lorsqu'il y a plusieurs fractions de dénominateurs différents, on prend souvent le produit des dénominateurs comme dénominateur commun.

Exercices : 41, 42 page 101 ; 72 page 102 ; 73 page 103 et 108 page 106 [11] – 40, 43page 101 et 71 page 102 [12] [Magnard]

2.3 Équations se ramenant à un quotient nul

Exemples :

1. Résoudre l'équation $\dfrac{2x+1}{x+5} = 4$.

11. Simplifier des expressions fractionnaires.
12. Réduire des expressions fractionnaires.

Il faut que $x+5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -5$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x+5} - 4 &= 0 \\
\frac{2x+1}{x+5} - \frac{4(x+5)}{x+5} &= 0 \\
\frac{2x+1-4(x+5)}{x+5} &= 0 \\
\frac{2x+1-4x-20}{x+5} &= 0 \\
\frac{-2x-19}{x+5} &= 0 \\
-2x-19 &= 0 \\
-2x &= 19 \\
x &= -\frac{19}{2}
\end{aligned}$$

La valeur obtenue étant différente de la valeur interdite -5, on a $S = \left\{-\frac{19}{2}\right\}$.

2. Résoudre l'équation $\dfrac{x^2+3x}{x+3} = 3$.
   Il faut que $x+3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -3$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+3x}{x+3} - 3 &= 0 \\
\frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{3(x+3)}{x+3} &= 0 \\
\frac{x^2+3x-3(x+3)}{x+5} &= 0 \\
\frac{x^2+3x-3x-9}{x+5} &= 0 \\
\frac{x^2-9}{x+5} &= 0 \\
x^2-9 &= 0 \\
x^2-3^2 &= 0 \\
(x-3)(x+3) &= 0 \\
x-3=0 \quad &\text{ou} \quad x+3=0 \\
x=3 \quad & \quad\quad x=-3
\end{aligned}$$

Mais, comme -3 est une valeur interdite, on obtient $S = \{3\}$.

Méthode :
1. Exclure les valeurs interdites.
   (celles qui annulent le dénominateur)
2. Se ramener à un quotient nul.
   (en regroupant tous les termes dans le premier membre)
3. Tout réduire au même dénominateur.
4. Résoudre l'équation « numérateur=0 » en utilisant si nécessaire la méthode du 1.4.
5. Vérifier que les valeurs obtenues ne soient pas des valeurs interdites, qu'il faudrait alors exclure de l'ensemble des solutions.

Remarques :

1. Dans le premier exemple, on aurait pu rendre les calculs plus faciles en utilisant les « produits en

croix » lorsque deux fractions sont égales :

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+5} &= 4 \\ \frac{2x+1}{x+5} &= \frac{4}{1} \\ (2x+1)\times 1 &= 4\,(x+5) \\ 2x+1 &= 4x+20 \\ -2x &= 19 \\ x &= -\frac{19}{2} \end{aligned}$$

2. Dans le deuxième exemple, on aurait pu être plus rapide si l'on avait pensé à réduire la fraction :

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x}{x+3} &= 3 \\ \frac{x(x+3)}{x+3} &= 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Exercices : 13, 14 page 99 ; 51, 52 page 101 et 86, 87 page 104 [13] – 91, 92 page 104 [14] – 110 page 106 [15] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, Magnard, 2019

2, 3, 4, 5, 7

13. Équations se ramenant à un quotient nul.
14. Utilisation en géométrie.
15. Application en économie.