Primitives
Équations différentielles

Christophe ROSSIGNOL[*]

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

1 Notion d'équation différentielle **2**

2 Notion de primitive d'une fonction **2**

2.1 Définition, exemple 2

2.2 Primitives des fonctions usuelles 2

2.3 Primitives et opérations sur les fonctions 2

2.4 Existence et ensemble des primitives 3

2.5 Méthodes classiques de recherche de primitives 4

3 Résolution d'équations différentielles **5**

3.1 Équations de la forme $y' = ay$ 5

3.2 Équations de la forme $y' = ay + b$ 6

Liste des tableaux

1 Primitives des fonctions usuelles 3

2 Méthodes classiques de recherche de primitives 4

1 Notion d'équation différentielle

Définition :
- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction y. Cette équation fait intervenir la fonction y et ses dérivées successives y', y'', ...
- On appelle solution de l'équation différentielle toute fonction f dérivable vérifiant cette équation.
- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions.

Exemples :

1. La fonction $x \longrightarrow \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
2. La fonction $x \longrightarrow x^2$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   On a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
   Donc la fonction f est solution de l'équation $y'' = y$.

Remarque : Les équations différentielles sont très utilisées en sciences expérimentales. On utilise dans ce cas une notation différente pour les dérivées. On note la dérivée $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ou $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ et la dérivée seconde $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ ou $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$.
Ces notations sont appelés notations différentielles.

Exercices : 1, 2, 3 page 207 ; 32, 34, 35 page 217[1] [Magnard]

2 Notion de primitive d'une fonction

2.1 Définition, exemple

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Ainsi, une fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I si, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple : La fonction $x \longrightarrow x^2$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.
Donc la fonction $F(x) = x^2$ est une primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f(x) = 2x$.

Exercices : 37, 38, 39, 41 page 218[2] – 81, 82 page 222[3] –103 page 225[4] [Magnard]

2.2 Primitives des fonctions usuelles

Les résultats du tableau 1 se retrouvent facilement par une lecture « inversée » du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles. Dans ce tableau C désigne un nombre réel quelconque.

2.3 Primitives et opérations sur les fonctions

On tire facilement des règles de calcul sur les dérivées le résultat suivant :

Propriété :
1. Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
2. Si F est une primitive de f sur I et si $k \in \mathbb{R}$, kF est une primitive de kf sur I.

1. Montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.
2. Premiers exemples de primitives.
3. Étude complète d'une primitive.
4. Déterminer une primitive.

fonction f	**primitive** F	**Domaine de validité**
$f(x) = a$ (a constante)	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2} + C$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier ≥ 2)	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}} + C$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$

Table 1 – Primitives des fonctions usuelles

Remarque : Attention ! Il n'y a pas de résultats analogues sur les produits et les quotients de fonctions (ce n'était déjà pas le cas pour la dérivation).

Exercices : 4, 5 page 207 ; 29, 31 page 217 et 42, 43 page 218[5] – 48, 49 page 219[6] [Magnard]

2.4 Existence et ensemble des primitives

Théorème : (admis)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Les deux résultats suivants permettent de déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction :

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1. Pour tout réel C, la fonction $x \longrightarrow F(x) + C$ est aussi une primitive de f sur I.
2. Si G est une primitive de f sur I, il existe un réel C tel que, pour tout $x \in I$:

$$G(x) = F(x) + C$$

Démonstration :
Le 1. est évident.
2. On note $\phi(x) = G(x) - F(x)$.
On a $\phi'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ sur l'intervalle I, donc la fonction ϕ est constante sur I.
Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $\phi(x) = 0$, c'est-à-dire $G(x) = F(x) + C$.

5. Primitives de fonctions usuelles.
6. Déterminations de primitives.

Remarque : Toute fonction continue admet donc une infinité de primitives. Toutes les primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.

Corollaire : Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive G de f sur l'intervalle I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration :
Soit F une primitive de f.
Toutes les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
On veut $G(x_0) = y_0$, c'est-à-dire $F(x_0) + C = y_0$; d'où $C = y_0 - F(x_0)$.
L'existence et l'unicité de C entraîne l'existence et l'unicité de la primitive G.

Exercices : 6 page 209 ; 44, 45, 47 page 218 et 57 page 219 [7] [Magnard]

2.5 Méthodes classiques de recherche de primitives

Les résultats du tableau 2 s'obtiennent par lecture « inversée » des résultats concernant la dérivation de fonctions composées.
Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f de la forme...	Une primitive F	Commentaires
$u'.u^n$ (avec n entier > 0)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	—
$\dfrac{u'}{u^n}$ (avec n entier ≥ 2)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x) > 0$ sur I
$u'.\mathrm{e}^u$	e^u	—
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I

TABLE 2 – Méthodes classiques de recherche de primitives

Exemples : 1. $f(x) = (2x+1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$
f semble de la forme $u'.u^5$ avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$.
On a donc :
$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x+1)^5$$
Une primitive de f sur I est donc :
$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^6}{6} = \frac{(2x+1)^6}{12}$$

2. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ sur $I = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$
f semble de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-2x$ et $u'(x) = -2$.
On a donc :
$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2}{(1-2x)^2}$$

7. Ensemble de primitives.

Une primitive de f sur I est donc :

$$F(x) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{1}{1-2x}$$

3. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-3x}}$ sur $I = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right[$
   f semble de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1-3x$ et $u'(x) = -3$.
   On a donc :
   $$f(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{1-3x}}$$
   Une primitive de f sur I est donc :
   $$F(x) = -\frac{2}{3} \times 2\sqrt{1-3x} = -\frac{4}{3}\sqrt{1-3x}$$
4. $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $I = \mathbb{R}$
   f semble de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\frac{x^2}{2}$ et $u'(x) = -x$.
   On a donc :
   $$f(x) = -3 \times \left(-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$
   Une primitive de f sur I est donc :
   $$F(x) = -3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercices : 8 page 209 et 50, 51, 52, 53 page 219 et 116 page 229 [8] – 55, 57 page 219 [9] – 15 ,16, 17 page 212 ; 79, 80 page 222 et 84, 85 page 223 [10] [Magnard]

3 Résolution d'équations différentielles

3.1 Équations de la forme $y' = ay$ $(a \neq 0)$

Théorème 1 : Les solutions sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $x \longrightarrow k\mathrm{e}^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration :
Soit $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.
On a $f'(x) = ka\mathrm{e}^{ax} = af(x)$ donc f est solution de l'équation différentielle.
Réciproquement, si g est une solution de l'équation différentielle, on note $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. On a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + (-a)g(x)\mathrm{e}^{-ax} \\ &= ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0 \end{aligned}$$

h' est nulle sur $\mathbb{R}$ donc il existe une constante k telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = k$, c'est-à-dire $g(x)\mathrm{e}^{-ax} = k$, d'où $g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$. g a donc bien la forme voulue.

Exemples :
1. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$
   Cette équation se met sous la forme $y' = -2y$.
   Les solutions sont donc les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-2x}$, où $k \in \mathbb{R}$.
2. Résolution de l'équation différentielle $3y + 4y' = 0$
   Cette équation se met sous la forme $y' = -\frac{3}{4}y$.
   Les solutions sont donc les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

8. Détermination de primitive.
9. Avec des conditions initiales.
10. Transformation de forme pour déterminer une primitive.

Théorème 2 : Pour tout couple de réels $(x_0\,;\,y_0)$, il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y' = ay$ sur $I = \mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Démonstration :
Les solutions sont de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.

$$f(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow k\mathrm{e}^{ax_0} = y_0 \Longleftrightarrow k = y_0\mathrm{e}^{-ax_0}$$

On a trouvé une seule valeur de la constante k, d'où l'unicité de la solution.

Remarque : Dans ce cas, la solution est :

$$f(x) = y_0\mathrm{e}^{-ax_0}\mathrm{e}^{ax} = y_0\mathrm{e}^{-ax_0+ax} = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$$

Exemple : Déterminer la solution f de l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$ telle que $f(2) = 3$
L'équation différentielle se met sous la forme $y' = \frac{5}{2}y$.
Les solutions sont donc de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$.
De plus, on veut que $f(2) = 3$, c'est-à-dire $k\mathrm{e}^5 = 3$. D'où $k = 3\mathrm{e}^{-5}$ et $f(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x-5}$.

Exercices : 10, 11 page 211 ; 18 page 213 et 59, 60, 61, 64 page 220 [11] – 20, 21 page 214 ; 63, 65 page 220 ; 71, 73 page 221 ; 88, 91 page 223 et 95 page 224 [12] [Magnard]

3.2 Équations de la forme $y' = ay + b$ (a et b non nuls)

Théorème :
1. Les solutions sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \longrightarrow k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où $k \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout couple de réels $(x_0\,;\,y_0)$, il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur $I = \mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Remarque : La fonction constante $x \longrightarrow -\dfrac{b}{a}$ est appelée solution particulière de l'équation.
Toute solution de l'équation se met donc sous la forme de la somme d'une solution de l'équation $y' = ay$ et de la solution particulière.

Démonstration (partielle) :
On montre facilement que toute fonction ayant la forme proposée est solution de l'équation différentielle.
Réciproquement, si f est solution de l'équation différentielle, on pose $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$.
On a : $g'(x) = f'(x)$ et comme f solution de l'équation différentielle, $f'(x) = af(x) + b$. d'où :

$$\begin{aligned} g'(x) &= af(x) + b \\ &= a\left[g(x) - \frac{b}{a}\right] + b \\ &= ag(x) - b + b \\ &= ag(x) \end{aligned}$$

Par suite, d'après 3.1 il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$. Par suite :

$$f(x) = g(x) - \frac{b}{a} = k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

La deuxième partie du théorème se prouve par une méthode analogue à celle du 3.1.

Exercices : 12, 13 page 211 ; 19 page 213 et 66, 67, 69 page 220 [13] – 72, 75 page 221 ; 92 page 223 et 83 page 224 [14] – 106, 107 page 226 [15] – 22, 23, 27 page 215 et 97, 98 page 224 [16] [Magnard]

11. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$.
12. Modéliser des phénomènes.
13. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$.
14. Modéliser des phénomènes.
15. Exercices-bilan.
16. Complément : résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay + \varphi$, où φ est une fonction.

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020

2, 3, 4, 5, 6