

Sens de variation d'une fonction

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

1	Une première approche graphique	2
2	Définitions	4
2.1	Sens de variation	4
2.2	Extremums	5
3	Sens de variation d'une fonction affine - Applications	5
3.1	Un complément sur le coefficient directeur	5
3.2	Sens de variation d'une fonction affine	6
3.3	Signe d'une fonction affine	6

Table des figures

1	Exemple de courbe représentative de fonction	3
2	Un premier tableau de variations	3
3	Courbe de l'activité 2	3
4	Un autre tableau de variations	3
5	Fonction croissante	4
6	Fonction décroissante	4
7	Signe d'une fonction affine – cas $m > 0$	7
8	Signe d'une fonction affine – cas $m < 0$	7

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Activité : Activité 1 page 218¹ [Magnard]

1 Une première approche graphique

De manière intuitive, on peut donner les définitions suivantes :

Définition 1 : — La fonction f est **croissante** si :
 plus x **augmente**, plus $f(x)$ **augmente** (c'est-à-dire que sa courbe représentative « **monte** »).
 — La fonction f est **décroissante** si :
 plus x **augmente**, plus $f(x)$ **diminue** (c'est-à-dire que sa courbe représentative « **descend** »).

Définition 2 : — Le **maximum** de la fonction f est l'**ordonnée** du point le plus « **haut** » de sa courbe représentative.
 — Le **minimum** de la fonction f est l'**ordonnée** du point le plus « **bas** » de sa courbe représentative.
 — Si b est un maximum ou un minimum de f , on dit que c'est un **extremum**.

Exemples : 1. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f fonction définie sur \mathbb{R} par
 $f(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$ (voir figure 1).

- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$; croissante sur l'intervalle $[-2; \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.
- Son maximum est 4. Il est atteint en $x = \frac{1}{2}$.
- Son minimum est -1 . Il est atteint en $x = -2$.

On peut résumer tout ceci dans un tableau appelé **tableau de variations** (voir figure 2).

2. On reprend la fonction de l'activité 2 du chapitre « généralités sur les fonctions » (voir figure 3).

- La fonction f est croissante sur l'intervalle $[8; 17]$ et décroissante sur les intervalles $[6; 8]$ et $[17; 22]$.
- Son maximum est 6. Il est atteint pour $t = 17$.
- Son minimum est -3 . il est atteint pour $t = 8$.

on peut résumer cette étude dans le tableau de variations de la figure 4.

Questions flash : 12, 14 page 226² [Magnard]

Exercices : 1, 2 page 223; 16 page 226 et 19, 20 page 227³ – 3, 4 page 224 et 21, 22, 24, 25 page 227⁴ – 7, 8 page 225 et 34, 36 page 228⁵ – 40, 41, 42, 43, 44 page 229 et 47, 51 page 230⁶ – 53, 54, 56 page 230 et 57 page 231⁷ [Magnard]

1. Vers le tableau de variations.
 2. Tableaux de variations.
 3. Dresser un tableau de variations.
 4. Utiliser un tableau de variations
 5. Déterminer un maximum, un minimum.
 6. Courbes et tableaux de variations
 7. Variations et extremums.

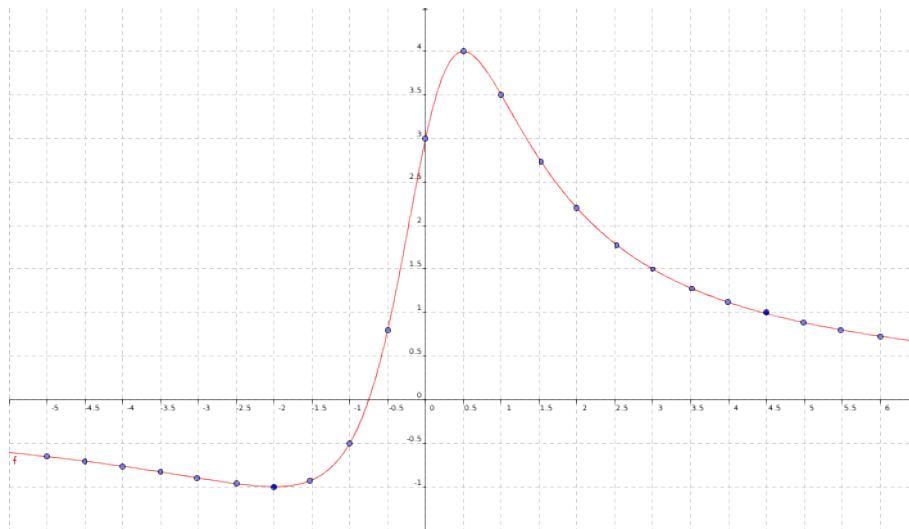


FIGURE 1 – Exemple de courbe représentative de fonction

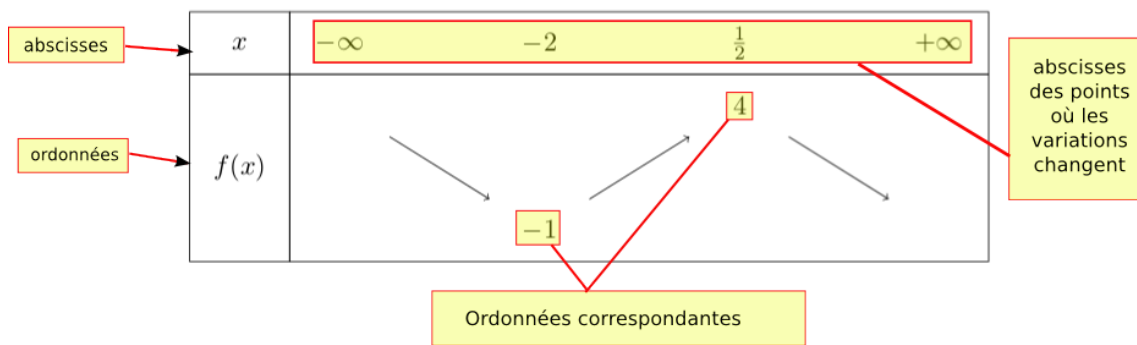


FIGURE 2 – Un premier tableau de variations

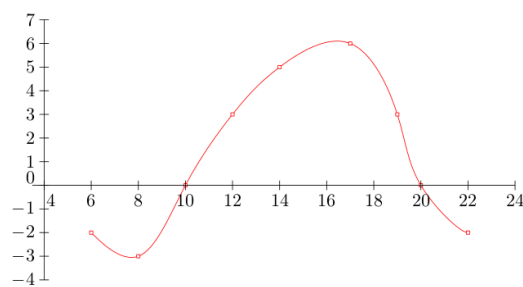


FIGURE 3 – Courbe de l'activité 2

t	6	8	17	24
$f(t)$	-2	-3	6	-2

FIGURE 4 – Un autre tableau de variations

2 Définitions

2.1 Sens de variation

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

— On dit que f est **croissante** sur l'intervalle I si :

$$\text{Pour tout } a, b \in I, \text{ si } a \leq b \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$

Ce qui signifie que f **conserve l'ordre** (voir figure 5).

— On dit que f est **décroissante** sur l'intervalle I si :

$$\text{Pour tout } a, b \in I, \text{ si } a \leq b \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$

Ce qui signifie que f **inverse l'ordre** (voir figure 6).

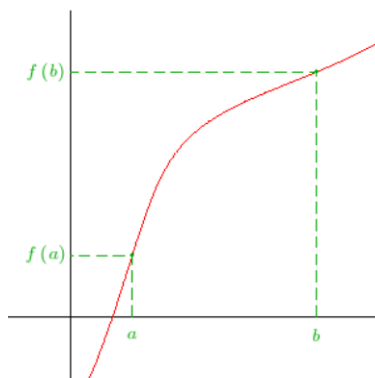


FIGURE 5 – Fonction croissante

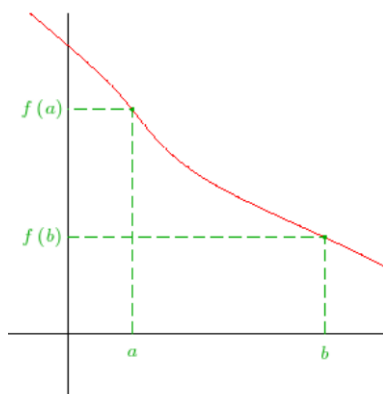


FIGURE 6 – Fonction décroissante

Remarque : Avec des inégalités strictes, on dit que f est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exercices : 58, 59, 60, 61 page 231⁸ – 85, 86 page 233⁹ – 91, 92 page 234 et 101 page 235¹⁰ [Magnard]

8. Comparer deux images.

9. Exercices bilan.

10. Démonstrations.

2.2 Extremums

Activité : Activité 4 page 219¹¹ [Magnard]

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que M est le **maximum** de f sur l'intervalle I si :
 - il existe $c \in I$ tel que $M = f(c)$;
 - pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- On dit que m est le **minimum** de f sur l'intervalle I si :
 - il existe $c \in I$ tel que $m = f(c)$;
 - pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

Remarque : Cette définition signifie que le **maximum** est la **plus grande des images** prises sur I et que le **minimum** est la **plus petite des images** prises sur I .

Exercices : 75, 76, 78 page 232¹² – 87, 89 page 233¹³ [Magnard]

3 Sens de variation d'une fonction affine - Applications

3.1 Un complément sur le coefficient directeur

Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$.
Soient a et b deux nombres réels distincts ($a \neq b$). On a :

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarques :

1. Ceci peut se lire :

$$m = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Ce quotient étant indépendant des valeurs choisies pour a et b , on vient de montrer que pour une fonction affine, l'**accroissement des images** est **proportionnel** à l'**accroissement de la variable**.
3. Cette égalité est en fait une caractérisation des fonctions affines.

Exemple d'utilisation : Détermination de la fonction affine f telle que $f(-2) = 1$ et $f(6) = 5$.

On a $f(x) = mx + p$.

$$m = \frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{5 - 1}{6 + 2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Par suite, $f(x) = \frac{1}{2}x + p$. Pour déterminer l'ordonnée à l'origine p , il suffit de remarquer que $f(-2) = 1$.
On a donc :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 1 \\ \frac{1}{2} \times (-2) + p &= 1 \\ -1 + p &= 1 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

On obtient donc $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

11. Minimum et maximum d'une fonction.

12. Extremums d'une fonction.

13. Problèmes d'optimisation.

3.2 Sens de variation d'une fonction affine

Activité : Activité 2 page 218¹⁴ [Magnard]

Propriété : Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$ alors la fonction f est **strictement croissante**.
- Si $m = 0$ alors la fonction f est **constante**.
- Si $m < 0$ alors la fonction f est **strictement décroissante**.

Démonstration (partielle)

Si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est une fonction constante.

Si $m < 0$:

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Comme $m < 0$, la multiplication par m inverse l'ordre donc : $ma > mb$.

Comme additionner un nombre ne change pas l'ordre, on a : $ma + p > mb + p$.

On obtient donc : $f(a) > f(b)$. Globalement, l'ordre a été inversé. La fonction f est donc strictement décroissante.

Exercice : Reprendre la démonstration précédente dans le cas où $m > 0$.

Question flash : Exercice 13 page 226¹⁵ [Magnard]

Exercices : 73, 79, 80, 81 page 232¹⁶ – 99 page 235¹⁷ [Magnard]

3.3 Signe d'une fonction affine

Étude préliminaire : Résolution de l'équation $mx + p = 0$ (avec $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} mx + p &= 0 \\ mx &= -p \\ x &= -\frac{p}{m} \end{aligned}$$

Cas 1 : Si $m > 0$

La fonction affine $f(x) = mx + p$ est strictement croissante et la droite la représentant coupe l'axe des abscisses en $x = -\frac{p}{m}$ (voir figure 7).

Le tableau de signes de la fonction f est donc le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $mx + p$	$-$	0	$+$

Cas 2 : Si $m < 0$

La fonction affine $f(x) = mx + p$ est strictement décroissante et la droite la représentant coupe l'axe des abscisses en $x = -\frac{p}{m}$ (voir figure 8).

Le tableau de signes de la fonction f est donc le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $mx + p$	$+$	0	$-$

Exemples : 1. **Signe de $(2x + 3)$**

Il faut d'abord déterminer la valeur pour laquelle le signe change :

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Comme le coefficient directeur est positif, on obtient le tableau de signes suivant :

14. Sens de variations des fonctions affines.

15. Sens de variation d'une fonction affine.

16. Sens de variation d'une fonction affine.

17. Aire et trapèze.

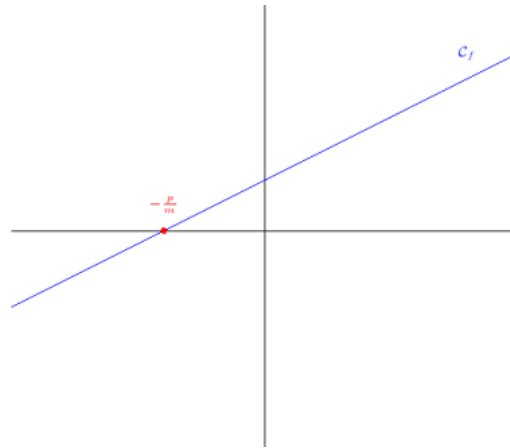


FIGURE 7 – Signe d'une fonction affine – cas $m > 0$

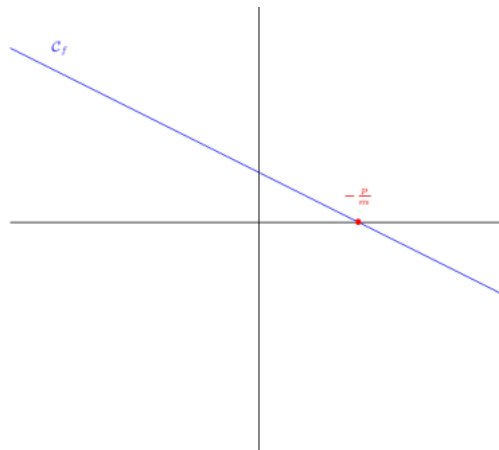


FIGURE 8 – Signe d'une fonction affine – cas $m < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x + 3$	-	0	+

2. **Signe de $(1 - 3x)$**

Il faut d'abord déterminer la valeur pour laquelle le signe change :

$$\begin{aligned} 1 - 3x &= 0 \\ -3x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comme le coefficient directeur est *néglatif*, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $2x + 3$	+	0	-

3. **Signe de $(2x + 3)(1 - 3x)$**

On a déjà étudié ci-dessus les signes de $2x + 3$ et de $1 - 3x$. Il va suffire de regrouper ces résultats dans un même tableau et de déduire le signe du produit $(2x + 3)(1 - 3x)$ grâce à la règle des signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
Signe de $2x + 3$	-	0	+	+	
Signe de $1 - 3x$	+	+	0	-	
Signe de $(2x + 3)(1 - 3x)$	-	0	+	0	-

4. **Signe de** $\frac{2x + 3}{1 - 3x}$

La règle des signes étant la même pour les quotients que pour les produits, en n'oubliant pas la valeur interdite lorsque le dénominateur s'annule.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
Signe de $2x + 3$	-	0	+	+	
Signe de $1 - 3x$	+	+	0	-	
Signe de $\frac{2x+3}{1-3x}$	-	0	+		-

Question flash : 16, 17 page 252¹⁸ [Magnard]

Exercices : 3, 4 page 249 et 24, 25, 26, 27 page 253¹⁹ – 6, 8 page 250 ; 30, 33 page 253 et 54, 56 page 255²⁰ – 7, 9 page 250 ; 31, 32, 34 page 253 et 53 page 255²¹ [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2^{de}, MAGNARD, 2019

2, 4, 5, 6, 8

18. Signe d'une fonction affine.

19. Signe d'une fonction affine.

20. Signe d'un produit.

21. Signe d'un quotient.