Résolution d'inéquations

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Exercices : 36, 43 page 254[1] [Magnard]

1 Inéquation « produit »

1.1 Cas d'une comparaison à zéro

On va utiliser les tableaux de signes pour résoudre certaines inéquations.

Exemple : Résoudre l'inéquation $(x-2)(-2x+3) \geq 0$

Cette inéquation revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression est positive. On va donc pouvoir les déterminer à l'aide d'un tableaux de signes.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(2x+3)(1-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme l'inéquation à résoudre est $(2x+3)(1-3x) \geq 0$, il faut chercher les signes « $+$ » dans la dernière ligne du tableau pour conclure :

$$S = \left[\frac{3}{2}\,;\,2\right]$$

Remarque : Pour pouvoir utiliser un tableau de signe, il faut que :
- le premier membre soit un produit entièrement factorisé ;
- le second membre soit zéro.

Exercices : 10 page 251 et 39 page 254[2] – 75 page 257[3] [Magnard]

1.2 Cas d'inéquations plus complexes

Exemple : Résoudre l'inéquation $(3x+5)^2 > 1$.

$$\begin{aligned}
(3x+5)^2 &> 1\\
(3x+5)^2 - 1 &> 0\\
(3x+5)^2 - 1^2 &> 0\\
[(3x+5)+1]\,[(3x+5)-1] &> 0\\
(3x+6)(3x+4) &> 0
\end{aligned}$$

Pour résoudre cette inéquation, on va étudier le signe de $(3x+6)(3x+4)$:

$$\begin{aligned}
3x+6=0 &\quad \text{donne} \quad x=-2\\
3x=4=0 &\quad \text{donne} \quad x=-\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x+6)(3x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme l'inéquation à résoudre est $(3x+6)(3x+4) > 0$, il faut chercher les signes « $+$ » dans la dernière ligne du tableau pour conclure :

$$S = \left]-\infty\,;\,-2\right[\cup \left]-\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$$

1. Utilisation des tableaux de signes pour résoudre une inéquation.
2. Résoudre une inéquation avec un tableau de signes.
3. Étude d'un bénéfice.

Méthode : 1. Se ramener à un second membre nul pour pouvoir faire un tableau de signes.
(en regroupant tous les termes dans le premier membre)
2. Factoriser le premier membre.
3. Conclure en utilisant un tableau de signes.

Exercices : 51 page 255[4] – 57 page 256[5] – 73, 74 page 256[6] [Magnard]

2 Inéquation « quotient »

2.1 Cas d'une comparaison à zéro

La méthode serra la même que pour les inéquations du 1.1, en n'oubliant pas au préalable d'étudier les valeurs interdites.

Exemple : Résoudre $\dfrac{3x+1}{x-5} \geq 0$.

Il faut que $x-5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 5$.
Cette inéquation revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression est positive. On va donc pouvoir les déterminer à l'aide d'un tableaux de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
Signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{3x+1}{x-5}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Comme l'inéquation à résoudre est $\dfrac{3x+1}{x-5} \geq 0$, il faut chercher les signes « + » dans la dernière ligne du tableau pour conclure :

$$S = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right] \cup \left]5\,;\,+\infty\right[$$

Remarques :

1. Attention à ne pas oublier d'exclure les valeurs interdites des ensembles de solution.
2. Pour pouvoir utiliser un tableau de signe, il faut que :
   — le premier membre soit un quotient entièrement factorisé ;
   — le second membre soit zéro.

Exercices : 40 page 254 et 58 page 256[7] – 76 page 257[8] – 85 page 258[9] [Magnard]

2.2 Cas d'inéquations plus complexes

Exemple : Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+5} \leq 4$.

Il faut que $x+5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -5$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x+5} - 4 &\leq 0 \\
\frac{2x+1}{x+5} - \frac{4\,(x+5)}{x+5} &\leq 0 \\
\frac{2x+1-4\,(x+5)}{x+5} &\leq 0 \\
\frac{2x+1-4x-20}{x+5} &\leq 0 \\
\frac{-2x-19}{x+5} &\leq 0
\end{aligned}$$

4. Tableaux de signes après factorisations.
5. Résoudre une inéquation avec un tableau de signes.
6. Positions relatives de deux fonctions.
7. Tableaux de signes après factorisations.
8. Offre et demande.
9. Aménagement d'un potager.

Cette inéquation revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression est négative. On va donc pouvoir les déterminer à l'aide d'un tableaux de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{19}{2}$		-5		$+\infty$
Signe de $-2x-19$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x+5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{-2x-19}{x+5}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Comme l'inéquation à résoudre est $\dfrac{-2x-19}{x+5} \leq 0$, il faut chercher les signes « $-$ » dans la dernière ligne du tableau pour conclure :

$$S = \left]-\infty\,;\,-\frac{19}{2}\right] \cup \left]-5\,;\,+\infty\right[$$

Méthode : 1. Exclure les valeurs interdites.
(celles qui annulent le dénominateur)
2. Se ramener à un deuxième terme nul.
(en regroupant tous les termes dans le premier membre)
3. Tout réduire au même dénominateur.
4. Résoudre l'inéquation obtenue à l'aide d'un tableau de signes..

Exercices : 52 page 255 [10] – 41 page 254 et 59, 60 page 256 [11] – 80, 81, 82 page 258 et 88, 94 page 259 [12] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, MAGNARD, 2019

2, 3, 4

10. Tableaux de signes après mise sous le même dénominateur.
11. Résoudre une inéquation avec un tableau de signes.
12. Exercices de synthèse.