Calcul intégral

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

En préliminaire au cours :

Activité : Activité 1 page 240 [1] [Magnard]

Dans tout ce chapitre, $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ désigne un repère orthogonal.
$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative d'une fonction f dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1 : On appelle unité d'aire du repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ la mesure des aires, notée u.a., telle que :

$$1 \text{ u.a.} = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$$

Il s'agit de l'aire du rectangle unité $OIKJ$ (voir figure 1).

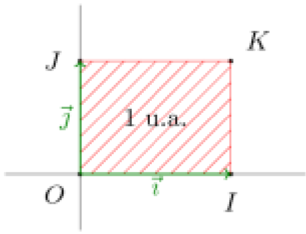

Figure 1 – Unité d'aire

Définition 2 : Intégrale d'une fonction continue positive
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (voir figure 3).
On la note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

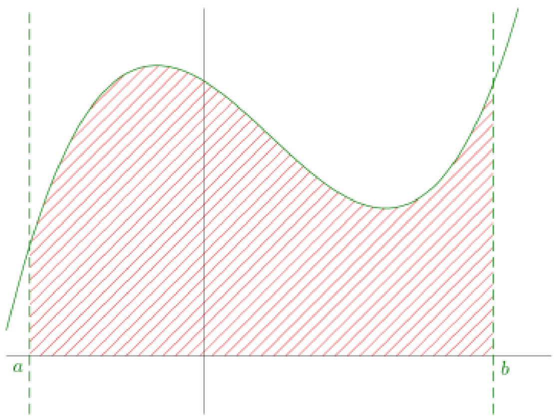

Figure 2 – Intégrale d'une fonction continue positive

1. Évaluer l'intégrale d'une fonction continue positive

Remarques : 1. Ceci se lit : « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou bien « somme[2] de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

2. On dit que la variable x est muette. On peut ainsi noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exemples : 1. Fonction constante $f(x) = 5$ (voir figure 3)

$$\int_{-2}^{5} 5\mathrm{d}x = 5\left(5 - (-2)\right) = 5 \times 7 = 35$$

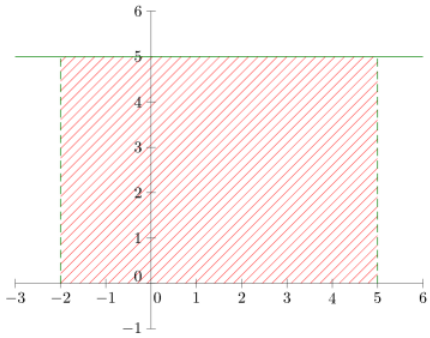

FIGURE 3 – Intégrale d'une fonction constante positive

2. Fonction affine $f(x) = x + 1$, positive sur $[2\,;\,4]$ (voir figure 4)

$$\int_2^4 (t+1)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{CDE} = 3 \times 2 + \frac{2 \times 2}{2} = 6 + 2 = 8$$

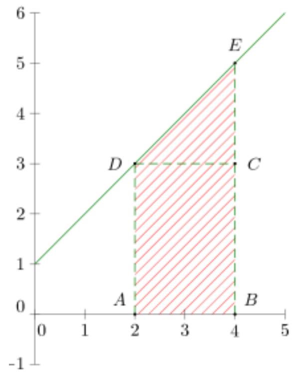

FIGURE 4 – Intégrale d'une fonction affine positive

3. En utilisant la méthodes des rectangles (voir activité 1 page 240[3] et programme Python `aire-rect.py`), on montre que :

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Remarque : On peut utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale.

Exercices : 1, 2 page 243 et 35, 36, 38, 39 page 254[4] – 3, 4 page 243 et 40, 41 page 255[5] [Magnard]

2. Pour comprendre l'utilisation du mot « somme », voir l'activité de la feuille polycopiée.
3. Évaluer l'intégrale d'une fonction continue positive
4. Utiliser les aires pour calculer une intégrale.
5. Méthode des rectangles.

2 Intégrale et primitive

2.1 Dérivabilité de la fonction aire

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors, la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $\Phi' = f$.

Remarque : La fonction Φ représente, en unités d'aire, l'aire sous la courbe représentant la fonction f, sur l'intervalle $[a\,;\,x]$ (voir figure 5).

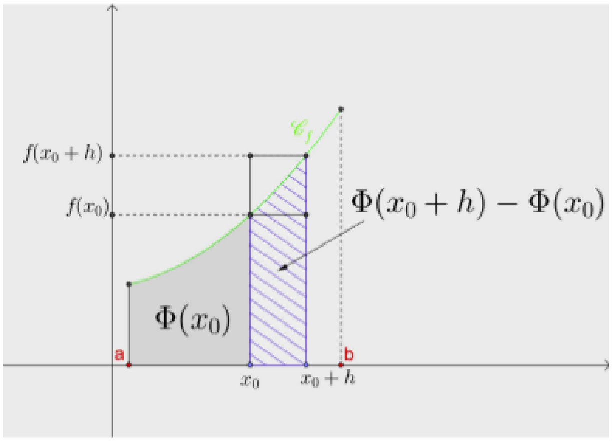

FIGURE 5 – Dérivabilité d'une fonction aire

Démonstration partielle
On se place dans le cas où f est croissante sur $[a\,;\,b]$.
Soit x_0 et x_0+h deux nombres de l'intervalle $[a\,;\,b]$ (voir figure 5).
– Si $h>0$:
Comme f est croissante sur $[a\,;\,b]$, on a :

$$h\times f(x_0) \leq \Phi(x_0+h)-\Phi(x_0) \leq h\times f(x_0+h)$$

et, par suite :

$$f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$

– Si $h<0$, on montre de même que :

$$f(x_0+h) \leq \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

Comme f est continue en x_0, on a $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ et, donc, par encadrement :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On en déduit donc que la fonction Φ est dérivable en x_0 et que $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Remarque : On a donc montré que la fonction Φ, aire sous la courbe de la fonction f, est une fonction *dont la dérivée est f*. Donc Φ est une primitive de f.

Exercices : 97, 99 page 258[6] [Magnard]

6. Fonction définie par une intégrale

2.2 Calcul d'intégrale d'une fonction continue et positive

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive *quelconque* de f sur I.
Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration :
Soit $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On a vu que Φ est une primitive de f sur I.
Par suite, comme F est aussi une primitive de f, il existe une constante C telle que $G(x) = F(x) + C$.
De plus, $\Phi(a) = 0 = F(a) + C$ donc $C = -F(a)$ et $\Phi(x) = F(x) - F(a)$.
On aboutit donc à $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui, appliqué en $x = b$, donne le résultat voulu.

Remarque : on écrira ce résultat sous la forme suivante :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple : On veut calculer $\int_1^3 \left(t^3 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t$.
On pose $f(t) = t^3 + 2t + 1$.
f est continue et positive sur $[1\,;3]$.
Une primitive de f sur $[1\,;3]$ est la fonction F définie par :

$$F(t) = \frac{t^4}{4} + t^2 + t$$

On a donc :

$$\int_1^3 \left(t^3 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + t\right]_1^3 = \left(\frac{81}{4} + 9 + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 + 1\right) = \frac{81}{4} + 12 - \frac{1}{4} - 2 = \frac{80}{4} + 10 = 30$$

3 Intégrale d'une fonction continue – Cas général

3.1 Existence de primitives d'une fonction continue

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarques : 1. On a déjà montré ce résultat pour des fonctions continues et positives au 2.1.

2. Pour la démonstration, on admettra le résultat suivant : « *Toute fonction continue sur un intervalle* $[a\,;b]$ *admet un minimum et un maximum sur* $[a\,;b]$ ».

Démonstration partielle
On se limitera au cas où I est un intervalle fermé de la forme $[a\,;b]$.
On note alors m le minimum de f sur $[a\,;b]$ et on note $g(x) = f(x) - m$.
g est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, elle admet donc une primitive G sur $[a\,;b]$.
On a donc $G'(x) = g(x) = f(x) - m$.
On note F la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.
F est dérivable sur $[a\,;b]$ et $F'(x) = G'(x) + m = f(x) + m - m = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $[a\,;b]$.

3.2 Extension de la définition

On peut remarquer que la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

donnée pour des fonctions continues et positives, a encore du sens lorsque la fonction n'est plus nécessairement positive.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$. On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque : Ce nombre ne représente plus une aire sous la courbe, et n'est pas nécessairement positif.

Propriété : Soit f une fonction continue sur I et a, $b \in I$.

$$\int_a^a f(t)\,\mathbf{d}t = 0$$

$$\int_b^a f(t)\,\mathbf{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathbf{d}t$$

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

$$\int_{-1}^3 (-3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^3 = -\frac{3\times 3^2}{2} - \left(-\frac{3\times(-1)^2}{2}\right) = -\frac{27}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{24}{2} = -12$$

$$\int_2^1 \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u}\right]_2^1 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 -\mathrm{e}^{-t+1}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t+1}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$$

Exercices : 5, 6 page 245 et 44, 45, 46, 47, 49, 52 page 255 et 83, 85, 89 page 258 [7] – 87 page 258 [8] – 90 page 258 [9] [Magnard]

3.3 Intégration par parties

Théorème : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées u' et v' sont continues sur I.

Si $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

7. Calcul d'intégrales à l'ai de primitives.
8. Suite d'intégrales.
9. Fonction définie par une intégrale.

Démonstration :
On sait que sur I : $(uv)' = u'v + uv'$ c'est-à-dire $u'v = (uv)' - uv'$.
Toutes les fonctions considérées étant continues sur I, on peut intégrer cette égalité :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (u(x)\,v(x))'\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

car uv est une primitive de $(uv)'$ sur I.

Exemples d'utilisation : 1. Calcul de l'intégrale $\int_0^2 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$
On pose $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = t$. On a alors $u(t) = \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = 1$. Donc :

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^2 - \int_0^2 1 \times \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^2 - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^2 = 2\mathrm{e}^2 - 0 - \left(\mathrm{e}^2 - 1\right) = \mathrm{e}^2 + 1$$

2. Détermination d'une primitive de $f(x) = \ln x$
$F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en 1.
On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$. On a alors $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. Donc :

$$F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t = x\ln x - 0 - \int_1^x 1\mathrm{d}t = x\ln x - [t]_1^x = \ln x - x + 1$$

Remarque : Les primitives étant définies à une constante près, la fonction $G(x) = x\ln x - x$ est aussi une primitive de $f(x) = \ln x$.

Exercices : 7a et 8b page 245 ; 54, 55 page 255 et 92, 94, 95 page 258 [10] [Magnard]

4 Propriétés de l'intégrale

4.1 Linéarité de l'intégrale

Théorème : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, $b \in I$ et $k \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :
On note F une primitive de f et G une primitive de g sur I.
Comme kF est une primitive de kf, on a :

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $F + G$ est une primitive de $f + g$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

10. Intégration par parties.

Conséquences : — *Intégrale d'une fonction continue négative*

Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ l'opposé de l'aire, exprimée en u.a., du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (voir figure 6).

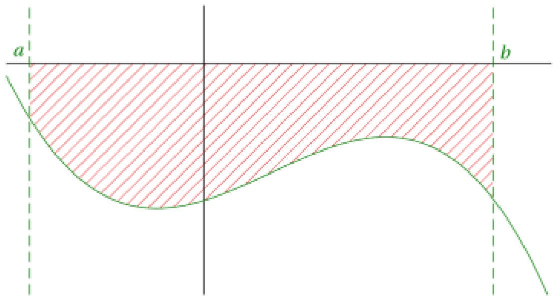

FIGURE 6 – Intégrale d'une fonction continue négative

En effet, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b (-f(t))\,\mathrm{d}t$, où $-f$ est une fonction continue et positive, dont la courbe est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

— *Aire du domaine entre deux courbes*

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, avec $f(x) \geq g(x)$ sur $[a\,;\,b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est :

$$\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$$

Pour des fonctions continues et positives, si $f \geq g$, cette aire est :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$$

Exercices : 9, 10 page 247 ; 65 page 256 et 110, 112, 113 page 260 [11] – 13 page 249 ; 75, 78 page 257 et 100 page 259 [12] – 80, 82 page 257 et 103, 104 page 259 [13] – 125 page 261 [14] – 109 page 260 [15] [Magnard]

4.2 Relation de Chasles

Théorème : Relation de CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, $c \in I$. On a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :
On note F une primitive de f sur I.

11. Linéarité de l'intégrale.
12. Calcul d'aires.
13. Aire entre deux courbes.
14. Interpréter une intégrale.
15. Suite d'intégrales

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\ &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Conséquence : *Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
L'intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ l'aire, exprimée en u.a., du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ comptée :

— positivement si $f(x) \geq 0$;
— négativement si $f(x) \leq 0$.

Sur la figure 7, on a donc :

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

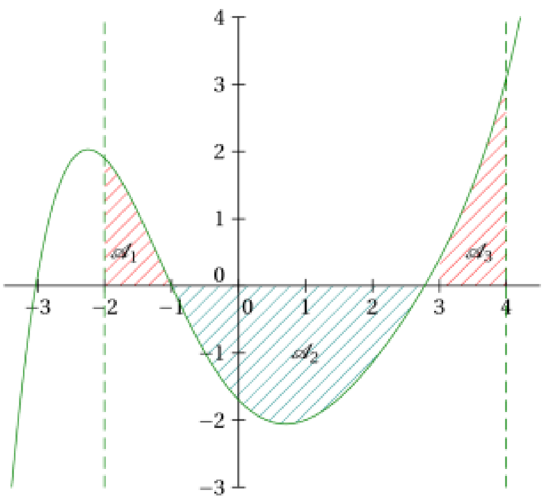

FIGURE 7 – Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Exercices : 68, 70 page 256 [16] – 14 page 249 ; 76, 77 page 256 et 102 page 259 [17] – 79 page 257 ; 106, 107 page 259 et 129 page 262 [18] – 115 page 260 [19] [Magnard]

4.3 Positivité, inégalité de la moyenne

Théorème : Positivité, Comparaison d'intégrales

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leq b$.

1. Si, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
2. Si, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

16. Utiliser la relation de CHASLES.
17. Intégrales et aires
18. Aires entre deux courbes.
19. Suite d'intégrales

Démonstration :
Le 1. est évident (pour une fonction positives, l'intégrale est l'aire sous la courbe)
2. On note $\phi = g - f$.
Pour tout $x \in [a\,,\,b]$, $\phi(x) \geq 0$ donc, d'après le 1., $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, soit $\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$.
En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ puis $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarques : 1. Attention ! L'hypothèse $a \leq b$ est essentielle car, si $a > b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. La réciproque de ce théorème est fausse.

Corollaire : Inégalité de la moyenne
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leq b$.
Soient m et M deux réels tel que, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Démonstration :
Comme pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, d'après le théorème précédent :

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x$$

Or $\int_a^b m\mathrm{d}x = m(b-a)$ et $\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a)$. D'où le résultat.

Exercices : 11 page 247 ; 66 page 256 et 108, 116 page 260 [20] – 12 page 247 [21] [Magnard]

4.4 Valeur moyenne

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On appelle valeur moyenne de f entre a et b le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : Si f est positive sur $[a\,;\,b]$, μ correspond à la hauteur du rectangle construit sur $[a\,;\,b]$, dont l'aire, exprimée en u.a. est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (voir figure 8).

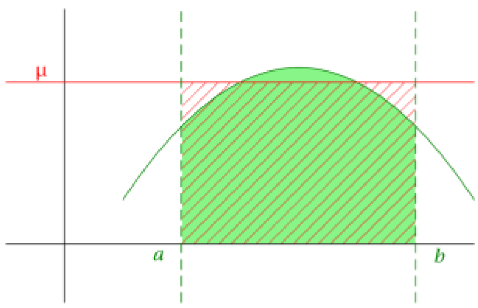

FIGURE 8 – Valeur moyenne

Exercices : 71, 72, page 256 [22] – 20 page 251 et 126 page 261 [23] [Magnard]

20. Intégrales et inégalités.
21. Une suite d'intégrales
22. Valeur moyenne.
23. Interpréter une intégrale.

5 Un exemple d'étude d'une suite d'intégrales

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$$

— Comme pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $t\mathrm{e}^{-nt} \geq 0$, on a $u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est donc minorée par 0.

— On note $f_n(t) = t\mathrm{e}^{-nt}$.
Pour tout $t \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) - f_n(t) &= t\mathrm{e}^{-(n+1)t} - t\mathrm{e}^{-nt} \\ &= t\mathrm{e}^{-nt} \times \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-nt} \\ &= t\mathrm{e}^{-nt}\left(\mathrm{e}^{-t} - 1\right) \\ &= t\mathrm{e}^{-nt}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t} - 1\right) \end{aligned}$$

Comme $t \in [0\,;\,1]$, $t\mathrm{e}^{-nt} \geq 0$ et, la fonction exponentielle étant croissante, $\mathrm{e}^t \geq \mathrm{e}^0 = 1$ et donc, par passage à l'inverse, $\frac{1}{\mathrm{e}^t} \leq 1$, d'où $\frac{1}{\mathrm{e}^t} - 1 \leq 0$.
On a donc, pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq 0$, c'est-à-dire $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$.
En passant aux intégrales, on obtient :

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$$

On obtient donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

— La suite (u_n) est décroissante, minorée. Elle est donc convergente.

— Reste à déterminer la limite de (u_n). Pour cela, on va chercher à l'encadrer.
On a déjà vu que, pour tout n, $u_n \geq 0$.
De plus, pour tout n et tout $t \in [0\,;\,1]$, on a :

$$t\mathrm{e}^{-nt} \leq \mathrm{e}^{-nt}$$

En passant aux intégrales, on obtient :

$$u_n \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{0,}^1 t\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) \leq \frac{1}{n} \text{ car l'exponentielle est toujours positive.} \end{aligned}$$

On a donc :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, en utilisant le théorème « des gendarmes », on en déduit que la suite (u_n) converge vers zéro.

Exercices : 18 page 250 ; 119, 120, 121 page 260 et 130, 131 page 262 [24] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11

24. Suites d'intégrales.