Vecteurs du plan

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

1 Notion de vecteur

Activité : Activité 1 page 136[1] [Magnard]

1.1 Définitions

Définition : Soient A et B deux points du plan.
À tout point M du plan on associe par la translation qui transforme A en B, l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme (voir figure 1).
Cette translation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

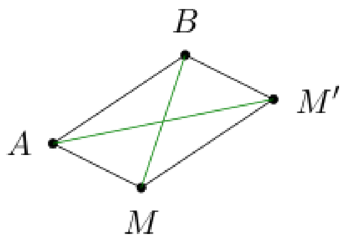

Figure 1 – Une translation

Remarque : Sur la figure 2, Le vecteur de translation qui transforme A en B, C en D et E en F peut être noté indifféremment $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$.
On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

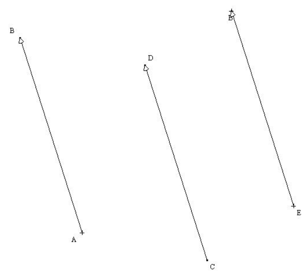

Figure 2 – Notation $\overrightarrow{u}$

Plus généralement, ce vecteur peut être noté $\overrightarrow{u}$, notation indépendante des points d'application.

Définition : Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
- sa direction (celle de la droite (AB)) ;
- son sens (de A vers B) ;
- sa norme (la longueur AB).

la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. On a donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre un vecteur et sa norme : la norme d'un vecteur est une longueur, c'est-à-dire un nombre alors qu'un vecteur est un objet géométriques regroupant 3 caractéristiques.

1.2 Égalité de deux vecteurs

Différentes façons d'exprimer l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, où A et B sont deux points non confondus (voir figure 3) :

1. Découvrir les vecteurs

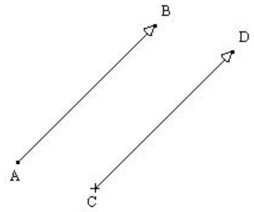

FIGURE 3 – Vecteurs égaux

1. Grâce à une transformation :
   D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Par une figure connue :
   AB**DC** est un parallélogramme.
3. En termes de milieux :
   $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu.
4. Par les caractéristiques des vecteurs :
   — $(AB) \parallel (CD)$, c'est-à-dire que les vecteurs ont même direction ;
   — on va de A vers B comme de C vers D, c'est-à-dire que les vecteurs ont même sens ;
   — $AB = CD$, c'est-à-dire que les vecteurs ont même norme.

Remarques : 1. L'égalité $AB = CD$ (égalité de longueur), ne suffit pas pour avoir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

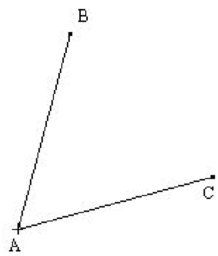

FIGURE 4 – Longueurs égales mais vecteurs non égaux

Dans la figure 4, $AB = AC$ mais $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$ (les vecteurs n'ont pas même direction).
Il est donc *très* important de ne pas oublier les « flèches » sur les vecteurs.

2. Que dire du vecteur $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$?
   C'est le vecteur nul, noté : $\overrightarrow{0}$. Il n'a pas de direction (donc pas de sens) et sa longueur est nulle.
3. Que dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$?
   Ils ont même direction, même longueur et sens contraire. On dit qu'ils sont opposés et on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ (voir figure 5).

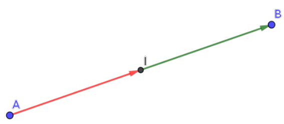

FIGURE 5 – Milieu d'un segment

Question flash : Exercice 28 page 150 [2] [Magnard]

Exercices : 35, 36, 37 page 151 [3] – 1, 2, 3, 4 page 144 et 38, 39 page 151 [4] – 40 page 151 [5] [Magnard]

2 Sommes de deux vecteurs

Activité : Activité 2 page 136 [6] [Magnard]

Définition : La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{s}$ résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ suivi de la translation de vecteur $\vec{v}$ (voir figure 6).
On note :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

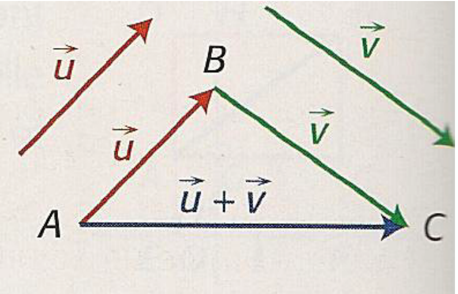

FIGURE 6 – Relation de CHASLES

Remarque : Si l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est B, et si l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$ est C, alors C est l'image de A dans la translation de vecteur $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Propriété : En conséquence :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation est appelée relation de CHASLES.
Elle est valable pour tous les points A, B, C du plan.

Remarques :

1. L'égalité de *longueurs* $AB + BC = AC$ est en général fausse. Dans la figure 4, on a : $AB + BC > AC$.
2. Cette propriété permet de construire une somme de vecteurs en les mettant « bout-à-bout » (l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second).

Définition : On rappelle que deux vecteurs opposés ont même direction, même longueur et sens opposé.
On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
Soustraire un vecteur à un autre, c'est additionner son opposé. C'est ainsi que l'on définit une soustraction de vecteurs.

Question flash : Exercice 29 page 150 [7] [Magnard]

Exercices : 5, 6, 7, 8 page 145 et 41, 43, 44 page 151 [8] – 49, 50, 51 page 152 [9] [Magnard]

2. Translations.
3. Vecteurs égaux.
4. Démontrer avec des vecteurs.
5. Logique.
6. Enchaîner deux translations.
7. Somme de vecteurs.
8. Construire la somme et la différence de deux vecteurs.
9. Calculs sur les vecteurs.

3 Produit d'un vecteur par un réel

Activité : Activité 3 page 137 [10] [Magnard]

Définition : A et B désignent deux points distincts et k un nombre réel non nul.
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors C est le point de la droite (AB)tel que :
- Si $k > 0$, $AC = k \times AB$ et les points B et C sont du même côté de A (figure 7).
- Si $k < 0$, $AC = (-k) \times AB$ et les points B et C sont de part et d'autre de A (figure 8).

FIGURE 7 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Cas 1

FIGURE 8 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Cas 2

Remarque : Autrement dit :
- Si $k > 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction, même sens et $AC = k \times AB$.
- Si $k < 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction, sens opposés et $AC = (-k) \times AB$.

Exemples : 1. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ (voir figure 9)

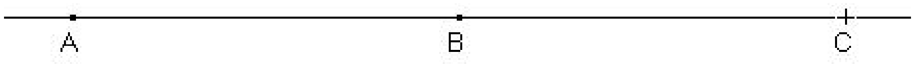

FIGURE 9 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Exemple 1

2. $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (voir figure 10)

FIGURE 10 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Exemple 2

Propriété : Soient A et B deux points et k un réel.
- Si $k > 0$, on a $\left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = k \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;
- Si $k < 0$, on a $\left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = -k \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Plus généralement, on a donc $\left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Remarques : 1. Par convention : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
On a ainsi : $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

10. Multiplier un vecteur par un réel.

2. Les règles de calcul de calcul sont les mêmes que pour les nombres.

Exemple : A, B et C sont trois points distincts. Exprimer la somme vectorielle $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) && (1)\\
&= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AC} && (2)\\
&= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} && (3)\\
&= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} && (4)\\
&= 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} && (5)
\end{aligned}$$

On commence par une relation de CHASLES (ligne 1), puis on développe la parenthèse (ligne 2) et enfin, on regroupe les termes jusqu'à arriver au résultat voulu.

Question flash : Exercice 30 page 150[11] [Magnard]

Exercices : 9, 10, 11, 12 page 146 et 46, 47 page 152[12] – 77, 78, 79 page 154[13] – 48, 52 page 152[14] [Magnard]

4 Repères et coordonnées

Activité : Activité 4 page 137[15] [Magnard]

4.1 Coordonnées d'un point – d'un vecteur

Définition 1 : Soient O, I et J trois points du plan non alignés. On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.
Le triplet $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est appelé repère du plan d'origine O.
Le couple $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est appelé base du plan.

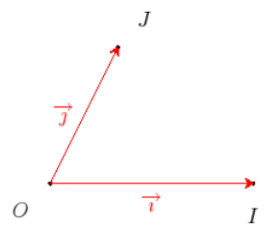

FIGURE 11 – Un repère du plan

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère et M un point du plan (voir figure 12).
Dire qu'un point M a comme coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

11. Produit d'un vecteur par un réel.
12. Produit d'un vecteur par un réel.
13. Point défini par une relation vectorielle.
14. Calculs sur les vecteurs.
15. Lien entre coordonnées de points et de vecteurs.

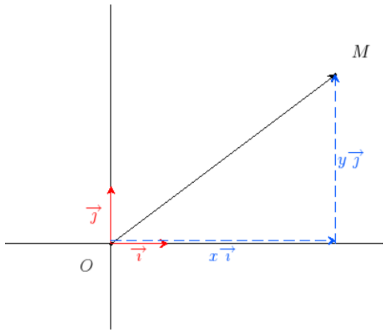

FIGURE 12 – Coordonnées d'un point

Définition : Soit $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$ un repère et $\vec{u}$ un point du plan (voir figure 13).

Si $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, on dit que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$.

a est appelé abscisse du vecteur $\vec{u}$.

b est appelé ordonnée du vecteur $\vec{u}$.

En résumé : $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ signifie que $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

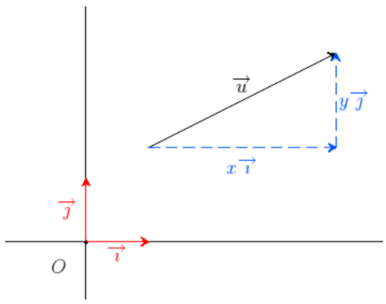

FIGURE 13 – Coordonnées d'un vecteur

Remarques :
1. On admettra que les coordonnées d'un point (ou d'un vecteur) sont uniques dans un repère donné.
2. On peut noter indifféremment $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\,(a\,;\,b)$.
   On préférera cependant la notation en colonne pour les vecteurs et celle en ligne pour les points, ce qui permet d'éviter toute ambiguïté.

4.2 Quelques propriétés

Dans toute la suite, les coordonnées des points ou des vecteurs sont donnés dans un repère $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$ fixé.

— **Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:**
Si $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

— **Égalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:**
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

— **Somme de deux vecteurs :**
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$

— **Produit d'un vecteur par un réel :**
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et si $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \end{pmatrix}$

Question flash : Exercice 31 page 150 [16] [Magnard]

Exercices : 13, 14, 15 page 147 ; 53, 55, 56, 57, 58 page 152 ; 61, 62 page 153 et 87 page 154 [17] – 64, 65, 66, 67 page 153 et 90 page 155 [18] [Magnard]

4.3 Norme d'un vecteur – Distance

Propriété 1 : Norme d'un vecteur

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormé, la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Remarque : Dans un repère orthonormé, il s'agit d'une application du théorème de Pythagore (voir figure 13). Ce qui explique que cette relation ne soit valable que dans un tel repère...

Propriété 2 : Distance

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormé, si $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarque : Il s'agit d'une application de la **propriété 1** avec le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, en remarquant que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

Question flash : Exercice 32 page 150 [19] [Magnard]

Exercices : 88 page 154 et 89 page 155 [20] [Magnard]

5 Colinéarité – Applications

5.1 Colinéarité, alignement et parallélisme

Définition : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si l'un d'eux est le produit de l'autre par un réel, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$).
Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur direction est la même.

Remarque : Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemples :
1. Sur la figure 14, les deux vecteurs sont colinéaires.
2. Sur la figure 15, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

De cette définition découle la propriété suivante :

Propriété : Parallélisme et alignement

1. $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (c'est-à-dire si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires)
2. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (c'est-à-dire si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires)

Exercices : 80, 81, 82, 83 page 154 [21] – 97, 99 page 156 [22] [Magnard]

16. Coordonnées d'un point, d'un vecteur.
17. Calculer avec les coordonnées.
18. Coordonnées d'un point inconnu.
19. Formules à ne pas confondre.
20. Norme, distance.
21. Colinéarité, parallélisme, alignement.
22. Exercices bilan.

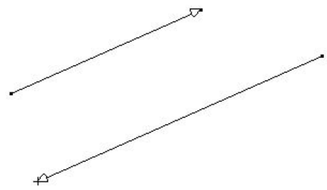

FIGURE 14 – Vecteurs colinéaires

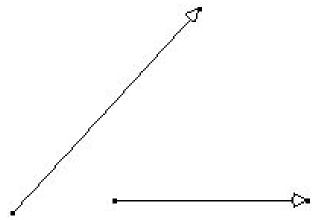

FIGURE 15 – Vecteurs non colinéaires

5.2 Expression de la colinéarité dans un repère

Activité : Activité 5 page 137 [23] [Magnard]

Définition : Soit $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$ un repère, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\det(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = ab' - a'b$.

Propriété : Colinéarité

Soit $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$ un repère, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur $\det(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = 0$.

Cela signifie que leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

— $\det(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = 2\times 3 - (-1)\times(-6) = 6 - 6 = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

— $\det(\vec{u}\,,\,\vec{w}) = 2\times(-2) - (-1)\times 3 = -4 - 3 = -7 \neq 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires.

— pour $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: sans aucun calcul supplémentaire, ils ne sont pas colinéaires (sinon $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ le seraient aussi).

Questions flash : Exercices 33, 34 page 150 [24] [Magnard]

Exercices : 19, 21, 22, 23, 24 page 149 et 68, 70, 71, 73 page 153 [25] – 100, 103, 104 page 156 [26] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, MAGNARD, 2019

3, 5, 6, 7, 9, 10

23. La colinéarité, à quoi ça sert ?
24. Expression de la colinéarité dans un repère.
25. Colinéarité, alignement, parallélisme.
26. Exercices bilan.