Les nombres complexes :
point de vue algébrique
et polynômes

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1 Ensemble des nombres complexes **2**

1.1 Forme algébrique 2

1.2 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$ 2

2 Conjugué d'un nombre complexe **3**

2.1 Définition – Propriétés 3

2.2 Opérations sur les nombres conjugués 4

3 Polynômes et résolution d'équations **4**

3.1 Équations du second degré 4

3.2 Factorisation et racines d'un polynôme 5

3.3 Complément : la formule du binôme de Newton 7

Table des figures

Activité : Activités 1 [1] et 2 [2] page 12 [Magnard]

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Forme algébrique

Théorème - Définition : Il existe une ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels.
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.
- On muni l'ensemble des nombres complexes d'une addition et d'une multiplication en appliquant les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1.

Exemples : Les nombres 2 ; 6 et i appartiennent à $\mathbb{C}$.
Les nombres $2+i$, $6i$ et $2-6i$ appartiennent à $\mathbb{C}$.

Propriété : Tout nombre complexe z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière *unique* sous la forme $a+ib$ avec a, b réels. Cette écriture est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
- le réel a est la partie réelle du nombre complexe z. Elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
- le réel b est la partie imaginaire du nombre complexe z. Elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemples :
1. $\mathrm{Re}\left(\sqrt{3}-i\right) = \sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}\left(\sqrt{3}-i\right) = -1$.
2. $\mathrm{Re}\left(-4i\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(-4i\right) = -4$.
3. Comme $i^2 = -1$, $-2i^2+3 = 2+3 = 5$ donc $\mathrm{Re}\left(-2i^2+3\right) = 5$ et $\mathrm{Im}\left(-2i^2+3\right) = 0$.

Remarques : Soit $z \in \mathbb{C}$
- z est un réel si et seulement si $\mathrm{Im}\left(z\right) = 0$.
  En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- z est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z\right) = 0$.
- $z = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(z\right) = 0$.

Propriété : Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z\right) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}\left(z\right) = \mathrm{Im}(z')$.

Exercices : 40 page 28 et 93 page 31 [3] – 1 page 15 et 41 page 28 [4] – 2 page 15 ; 25, 26 page 27 et 38, 39 page 28 [5] – 3, 4 page 15 ; 43, 44 page 28 et 95 page 31 [6] [Magnard]

1.2 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$: Soit z et z' deux nombres complexes de forme algébrique $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$.
On a :

$$\begin{aligned} z+z' &= (a+a') + i\,(b+b') \\ z.z' &= (aa'-bb') + i\,(ab'+a'b) \end{aligned}$$

Démonstration :

$$z+z' = a+ib+a'+ib' = (a+a') + i(b+b')$$
$$z.z' = (a+ib)\,(a'+ib') = aa'+iab'+ia'b-bb' = (aa'-bb') + i\,(ab'+a'b)$$

1. Faire le point sur les ensembles de nombres.
2. Découvrir une approche historique.
3. Puissances de i.
4. Forme algébrique d'un nombre complexe.
5. Parties réelles et imaginaires.
6. Premières résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$.

Remarques : 1. En particulier, si k est un nombre réel, on a $k.z = (kx) + i\,(ky)$.

2. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ et on retrouve les mêmes identités remarquables.

Exemple : $(a+ib)\,(a-ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2 = a^2 - (-1)\,b^2 = a^2 + b^2$

On obtient donc une nouvelle identité remarquable valable dans $\mathbb{C}$: $a^2 + b^2 = (a+ib)\,(a-ib)$.

Exercices : 5, 6 page 17 ; 27, 28 page 27 ; 46, 47, 48, 49, 50, 51 page 28 [7] – 96 page 31 [8] ; 23 page 25 et 126, 127, 129 page 33 [9] [Magnard]

2 Conjugué d'un nombre complexe

Activité : Activité 4 page 13 [10] [Magnard]

2.1 Définition – Propriétés

Définition : Soit z le nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = a - ib$.

Remarque : De la définition, on tire facilement que : $\overline{\left(\overline{z}\right)} = z$.

Propriété : Soit z un nombre complexe. On a :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

Démonstration :

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathbf{Re}\,(z)$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-(a-ib)}{2i} = \frac{a+ib-a+ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \mathbf{Im}\,(z)$$

$$z\overline{z} = (a+ib)\,(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Remarques : 1. En particulier, on a les résultats suivants :

— z est un nombre réel si et seulement $z = \overline{z}$.
— z est un imaginaire pur si et seulement $z + \overline{z} = 0$.

2. De la dernière égalité, on déduit que $z\overline{z}$ est toujours un nombre réel positif. Ce résultat sera utilisé, entre autres, pour trouver la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes.

Exemples : 1. $\dfrac{2}{3+i} = \dfrac{2\,(3-i)}{(3+i)\,(3-i)} = \dfrac{6-2i}{3^2+1^2} = \dfrac{6-2i}{4} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$

2. $\dfrac{2-i}{3-2i} = \dfrac{(2-i)\,(3+2i)}{(3-2i)\,(3+2i)} = \dfrac{6+4i-3i+2}{3^2+(-2)^2} = \dfrac{8+i}{12} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{12}i$

Exercices : 31, 32 page 27 ; 62, 63 page 29 et 100 page 31 [11] – 7 page 17 ; 29, 30 page 27 ; 55, 56, 57, 58 page 29 et 99 page 31 [12] – 8 page 17 ; 52, 53 page 28 ; 60, 61 page 29 et 108, 109 page 32 [13] – 118 page 32 [14] – 11 page 19 et 70 page 29 [15] – 12 page 19 et 71 page 29 [16] – 72, 73 page 30 [17] – 24 page 25 et 128 page 33 [18] – 97, 98 page 31 [19] [Magnard]

7. Calculs dans $\mathbb{C}$
8. Fonction Python.
9. Suites de nombres complexes.
10. Découvrir le conjugué d'un nombre complexe.
11. Conjugué d'un nombre complexe.
12. Forme algébrique d'un quotient.
13. Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$.
14. Système d'équations
15. Équations avec $\overline{z}$.
16. Équations avec z et $\overline{z}$
17. Fonctions d'une variable complexe.
18. Suite de nombres complexes.
19. Fonction Python.

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{-z} = -\overline{z}$ et $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
4. Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Démonstration (partielle) :

2. Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$. De plus : $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - (-b) \times (-b')) + i(-ab' - a'b) = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$. On en déduit que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

3. On a $z \times \frac{1}{z} = 1$ donc $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1}$, d'où $\overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$, puis $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

4. On montre ce résultat par récurrence sur n.

Initialisation : $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $(\overline{z})^0 = 1$. On a donc $\overline{z^0} = (\overline{z})^0$. La propriété est vérifiée au rang zéro.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ et on veut montrer que $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\ &= \overline{z^n} \times \overline{z} \\ &= (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion : On a donc montré que, pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Remarque : La démonstration du 1. est évidente en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Pour montrer que $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$, il suffit de remarquer que $z' \times \frac{1}{z}$ et appliquer les propriétés précédentes.

Exercices : 9, 10 page 19 ; 64, 65, 67, 68 page 29 ; 103, 104, 105 page 31 et 133 page 34 [20] [Magnard]

3 Polynômes et résolution d'équations

3.1 Équations du second degré

Activité : Activité 5 page 13 [21] [Magnard]

Propriété 1 : Résolution d'une équation de la forme $z^2 = a$, avec a réel
- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a < 0$, l'équation n'admet deux solutions complexes conjuguées : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Exemples :

1. $z^2 - 5 = 0 \iff z^2 = 5$ admet comme ensemble de solution sur $\mathbb{C}$: $S = \left\{-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\right\}$
2. $z^2 + 5 = 0 \iff z^2 = -5$ admet comme ensemble de solution sur $\mathbb{C}$: $S = \left\{-i\sqrt{5}\,;\,i\sqrt{5}\right\}$
3. $z^2 = -9$ admet comme ensemble de solution sur $\mathbb{C}$: $S = \{-3i\,;\,3i\}$

20. Opérations sur les conjugués.
21. Résoudre des équations du second degré.

Propriété 2 : Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

On considère l'équation de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de cette équation.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarques :

1. Les racines du trinôme du second degré à coefficients réels sont donc soit réelles, soit complexes conjugués.
2. Dans $\mathbb{C}$, un trinôme du second degré se factorise donc *toujours* sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$.
3. Pour une démonstration de cette propriété dans le cas où $\Delta < 0$, voir l'exercice 113 page 32 [Magnard].

Exemples :

1. $4z^2 - 20z + 25 = 0$
   $\Delta = 20^2 - 4 \times 4 \times 25 = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle $z_0 = -\dfrac{-20}{2 \times 4} = \dfrac{5}{2}$.
2. $2z^2 - 4z + 4 = 0$
   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 4 = -16$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-4) - i\sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{4 - 4i}{4} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-(-4) + i\sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{4 + 4i}{4} = 1 + i$$

Exercices : 33, 34, 35 page 27 ; 79, 80, 81, 82 page 30 ; 111, 112, 115, 116, 117, 120 page 32[22] – 119 page 32 et 137 page 34[23] [Magnard]

Module : TP2 page 41[24] [Magnard]

3.2 Factorisation et racines d'un polynôme

Définitions : Soit n un entier naturel.

— On appelle polynôme de degré n à coefficients réels toute fonction de la variable complexe z pouvant s'écrire sous la forme :

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

où c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_n sont des nombres réels et où $c_n \neq 0$.

— On dit que le nombre complexe a est racine du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$.

Remarque : On peut aussi noter $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$.

Exemple : On a vu au 3.1 que le polynôme du second degré $P(z) = 2z^2 - 4z + 4$ admet comme racines les nombres complexes conjugués $1 - i$ et $1 + i$.

22. Résolutions d'équations du second degré.
23. Fonction d'une variable complexe.
24. Algorithmes et équations du second degré.

Propriété : Factorisation d'un polynôme par $z - a$

1. Pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre complexe a, on a :

$$z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-1}\right) = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

2. Soit P un polynôme de degré n et a une racine de P.
   Alors, pour tout nombre complexe z, on peut écrire $P(z) = (z-a)\,Q(z)$, où Q est un polynôme dont le degré est inférieur ou égal à $n-1$.

Remarque : Pour une démonstration de cette propriété, on pourra consulter la vidéo suivante : Démonstration 1.

Exemples :

1. On sait déjà que $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$.
   On obtient, grâce à la propriété :

$$z^3 - a^3 = (z-a)\left(z^2 + az + a^2\right)$$

$$z^4 - a^4 = (z-a)\left(z^3 + az^2 + a^2 z + a^3\right)$$

2. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + z + 2$.
   On a $P(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 2 = 8 - 12 + 2 + 2 = 0$.
   Donc 2 est une racine de P. On a donc : $P(z) = (z-2)\,Q(z)$.
   Comme P est de degré 3, Q est de degré 2.
   On a donc : $Q(z) = az^2 + bz + c$

$$\begin{array}{rcl} (z-2)\,Q(z) & = & (z-2)\left(az^2+bz+c\right) \\ & = & az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c \\ & = & az^3 + (b-2a)\,z^2 + (c-2b)\,z - 2c \end{array}$$

   Or, $(z-2)\,Q(z) = P(x) = z^3 - 3z^2 + z + 2$.
   Donc, par identification :
   $\begin{cases} a & = 1 \\ b - 2a & = -3 \\ c - 2b & = 1 \\ -2c & = 2 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} a & = 1 \\ b & = -3 + 2 = -1 \\ c & = 1 + 2 \times (-1) = 1 - 2 = -1 \\ c = & \frac{2}{-2} = -1 \end{cases}$
   D'où : $Q(z) = z^2 - z - 1$ et $P(z) = (z-2)\left(z^2 - z - 1\right)$.

Remarque : On pourrait maintenant résoudre l'équation $P(z) = 0$.
Cela revient à $z - 2 = 0$ ou $z^2 - z - 1 = 0$. Le calcul se termine avec un calcul de discriminant.
On peut donc en déduire le résultat suivant :

Propriété : Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.
Autrement dit : le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

Remarque : Pour une démonstration de cette propriété, on pourra consulter la vidéo suivante : Démonstration 2.

Exercices : 17, 18 page 23 et 83, 84, 85 page 30 [25] – 19, 20 page 23 et 87, 88 page 30 [26] – 90, 92 page 30 ; 21, 22 page 24 ; 121, 122, 123 page 33et 134 page 34 [27] [Magnard]

Module : TP 1 page 40 [28] [Magnard]

25. Factorisation de $z^n - a^n$.
26. Factorisation par $z - a$.
27. Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$.
28. Utilisation d'un logiciel de calcul formel.

3.3 Complément : la formule du binôme de Newton

Cette partie ne pourra être abordée qu'après avoir vu en cours de Spécialité Maths le chapitre « Dénombrement ». On rappelle ci-dessous les différents résultats de ce chapitre sur les coefficients binomiaux.

Définition 1 : Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E contenant p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, ce qui se lit « p parmi n ».

Exemples :

— $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, car il y a une seule partie d'un ensemble E à zéro élément (l'ensemble vide) ;

— $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$, car il y a une seule partie d'un ensemble E à n élément (l'ensemble E lui-même) ;

— $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$, car il y a n parties d'un ensemble E à 1 élément ;

— $\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$, car il y a n parties d'un ensemble E à $(n-1)$ éléments.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

Exemple : Le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments est :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Propriété 1 : Soit n un entier naturel.

1. Si p est un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

2. Si p est un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n-1$:

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

Remarque : En particulier, la deuxième formule permet de calculer $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ de proche en proche. Les résultats sont détaillés dans le tableau 1, appelé triangle de PASCAL.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

TABLE 1 – Triangle de PASCAL

Propriété : Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarques :

1. Pour une démonstration de cette propriété, on pourra consulter la vidéo suivante : Démonstration 3.
2. Des les calculs, pour déterminer les coefficients binomiaux, on utilise souvent le triangle de Pascal.

Exemples :

1. Développement de $(a+b)^3$:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} \\ &= \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0 \\ &= 1 \times b^3 + 3 \times ab^2 + 3 \times ab^2 + 1 \times a^3\end{aligned}$$

2. Développement de $(1+i)^4$:

$$\begin{aligned}(1+i)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^k i^{4-k} \\ &= \binom{4}{0} 1^0 i^4 + \binom{4}{1} 1^1 i^3 + \binom{4}{2} 1^2 i^2 + \binom{4}{3} 1^3 i^1 + \binom{4}{4} 1^4 i^0 \\ &= 1 \times 1 \times 1 + 4 \times 1 \times (-i) + 6 \times 1 \times (-1) + 4 \times 1 \times i + 1 \times 1 \times 1 \\ &= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4\end{aligned}$$

Exercices : 13, 14 page 21 ; 74, 76, 77, 78 page 30 et 135 page 34 [29] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Expertes, Magnard, 2020

29. Binôme de Newton.