Les Nombres

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1 Rappels : Calculs sur les fractions

Question Flash : exercice 24 page 54[Magnard]

Propriété 1 : *Addition ou soustraction de fractions*

1. On réduit les fractions au même dénominateur.
2. On additionne ou on soustrait les numérateurs.
3. On réduit la fraction obtenue si nécessaire.

Exemple 1 : $\frac{5}{6}+\frac{-1}{3}=\frac{5}{6}+\frac{(-1)\times 2}{3\times 2}=\frac{5}{6}+\frac{-2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{3\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{2}$

Propriété 2 : *Multiplication de fractions*

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
On réduit la fraction obtenue le plus tôt possible pour éviter des calculs inutiles.

Exemple 2 : $\frac{-3}{10}\times\frac{-11}{3}=\frac{(-3)\times(-11)}{10\times 3}=\frac{(-1)\times(-11)}{10\times 1}=\frac{11}{10}$

Propriété 3 : *Inverse et quotient de fractions*

— L'inverse d'une fraction est obtenu en échangeant numérateur et dénominateur.
— Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

Exemple 3 : $\frac{8}{-1}\div\frac{-4}{5}=\frac{8}{-1}\times\frac{5}{-4}=\frac{8\times 5}{(-1)\times(-4)}=\frac{2\times 5}{(-1)\times(-1)}=\frac{10}{1}=10$

Remarque : L'expression $\frac{8}{-1}\div\frac{-4}{5}$ peut aussi s'écrire $\frac{\frac{8}{-1}}{\frac{-4}{5}}$.

Exercices : 51, 52 page 55 et 53, 54 page 56 [1] – 55 page 56 88, 89 page 58 [2] –64 page 56 [3] –90 page 58 et 91, 92 page 59 [4] – 127 page 162 [5] [Magnard]

2 Puissances d'un nombre

2.1 Définitions

Activité : Activité 1 page 44 [6] [Magnard]

Définition : Soit a un nombre et n un entier strictement positif. On pose :

$a^1 = a$

$a^2 = a \times a$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Par convention, on pose aussi : $a^0 = 1$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ et plus généralement :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

1. Calculs sur les quotients.
2. Ordres de priorité des opérations
3. Automatismes.
4. Problèmes.
5. Calculs algébriques et quotients.
6. Calculer avec des puissances de 10

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{7 \times 7} = \dfrac{1}{49}$

Question flash : Exercice 22 page 54 [Magnard]

Exercices : 45, 46 page 55 [7] – 79 page 58 [8] [Magnard]

2.2 Règles de calcul sur les puissances

Les règles de calcul sur les puissances sont résumées dans le tableau 1.

Opérations	**Conditions**	**Résultat**
Produit de deux puissances	a nombre réel non nul n, p entiers	$a^n \times a^p = a^{n+p}$
Quotient de deux puissances	a nombre réel non nul n, p entiers	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
Puissance d'une puissance	a nombre réel non nul n, p entiers	$(a^n)^p = a^{n \times p}$
Puissance d'un produit	a, b nombres réels non nuls n entier	$(ab)^n = a^n \times b^n$
Puissance d'un quotient	a, b nombres réels non nuls n entier	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

TABLE 1 – Règles de calcul sur les puissances

Remarques :

1. Si n est un entier *pair*, $(-1)^n = 1$.
   Si n est un entier *impair*, $(-1)^n = -1$.
2. Attention ! Il n'existe pas de règle équivalente pour la puissance d'une somme. De manière générale, $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.
   Par exemple : $(2+3)^2 = 5^2 = 25$ et $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

Exemples :

$5^4 \times 5^{-2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$

$(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6 = 729$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$

$\dfrac{(2^2)^3 \times 2^{-1}}{2^{-4} \times 4^3} = \dfrac{2^6 \times 2^{-1}}{2^{-4} \times (2^2)^3} = \dfrac{2^5}{2^{-4} \times 2^6} = \dfrac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$

Question flash : Exercice 23 page 54 [Magnard]

7. Puissances d'un nombre.
8. Algorithme.

Exercices : 47, 48, 49 page 55 [9] – 112 page 61 et 125 page 62 [10] [Magnard]

2.3 Différentes écritures d'un nombre décimal

Question flash : Exercice 77 page 57 [Magnard]

Prenons le nombre décimal $18354,23$. On peut l'écrire de différentes façons :

Écriture décimale : $18354,23$

Écriture scientifique : $1,835423 \times 10^4$

Entier et puissance de 10 : 1835423×10^{-2}

Définition : L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et où b est un nombre entier..

Remarques : 1. « Déplacement » de la virgule :

$$1835{,}423\times 10^1 \xleftarrow{\cdots\times 10^{+\text{longueur du déplacement}}\cdots} 18354,23 \xrightarrow{\cdots\times 10^{-\text{longueur du déplacement}}\cdots} 183542{,}3\times 10^{-1}$$

2. L'écriture scientifique d'un nombre permet d'obtenir un ordre de grandeur :
$18354,23 = 1,835423 \times 10^4 \approx 2 \times 10^4$ soit proche de $20\,000$.

Exercices : 81, 82, 83, 84 page 58 [11] – 78 page 57 [12] – 114 page 61 [13] [Magnard]

3 Racine carrée

3.1 Définitions

Activité : Activité 2 page 44 [14] [Magnard]

Définition : Si a est un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le seul nombre positif dont le carré est a.

Exemples : $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{-3}$ n'a pas de sens.

Remarque : Il résulte donc directement de la définition que si $a \geq 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exercice : Quelle est la réponse exacte ?

$\sqrt{(-3)^2} = -3$	$\sqrt{(-3)^2} = 3$	$\sqrt{(-3)^2} = -\sqrt{3^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$ **n'existe pas**

Remarque : On admettra provisoirement le résultat suivant :
- Si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$;
- Si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

Il sera montré dans le chapitre « Intervalles - Inégalités ».

Question flash : exercice 25 page 54 [Magnard]

Exercices : 56, 57 page 56 [15] [Magnard]

9. Calculs sur les puissances.
10. utilisation en Chimie.
11. Différentes écritures d'un nombre décimal.
12. Ordre de grandeur.
13. Utilisation en biologie.
14. Connaître de nouveaux nombres
15. Racine carrée d'un nombre.

3.2 Règles de calcul sur les racines carrées

Propriété :
- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si, de plus, $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration (partielle) :

Soient a et b deux nombres positifs. On a : $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$.

De plus, $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Les nombres positifs $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ont même carré. Ils sont donc égaux.

Remarques :

1. La démonstration de la deuxième partie de la propriété est similaire. Elle peut être traitée en exercice.
2. La condition $a \geq 0$ et $b \geq 0$ est essentielle. En effet : $\sqrt{(-3) \times (-2)} = \sqrt{6}$ mais la notation $\sqrt{-3}$ n'a aucun sens.

Exemples :

$\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Question flash : exercice 26 page 54 [Magnard]

Exercices : 58, 60, 62, 63 page 56 et 98, 100, 101 page 59 [16] [Magnard]

Remarque : Il n'existe *aucun* résultat similaire pour les additions. De manière générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Par exemple, $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.
Plus précisément, on a le résultat suivant :

Propriété : Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration :

On considère un triangle ABC, rectangle en A, tel que $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$.

D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (\sqrt{a})^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b$. On a donc : $BC = \sqrt{a+b}$.

De plus, comme ABC rectangle en A : $BC < AB + AC$. On a donc : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercices : 103 page 60 et 116 page 61 [17] – 108 page 60 [18] – 134 page 63 [19] [Magnard]

4 Les ensembles de nombres

4.1 Différents types de nombres

Activité : Activité 4 page 44 [20] [Magnard]

16. Calculer avec des racines carrées.
17. Géométrie et racine carrée.
18. Travail de groupe autour du nombre d'or.
19. Plus difficile.
20. Faire le point sur les nombres.

Définition :
- On appelle entiers naturels les nombres : $0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\ldots$ Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$.
  On a donc : $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\ldots\}$
- On appelle entiers relatifs les nombres : $\ldots -3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\ldots$ Leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$.
  On a donc : $\mathbb{Z} = \{\ldots -3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\ldots\}$
- On appelle nombres décimaux les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule. Leur ensemble est noté $\mathbb{D}$.
  Par exemple :
  $$0,154 = \frac{154}{1000} = \frac{154}{10^3}$$
  On peut montrer que tous les nombres décimaux peuvent se mettre sous la forme : $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et où $n \in \mathbb{N}$.
- On appelle nombres rationnels les nombres de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, avec $b \neq 0$. Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble de tous les nombres connus en Seconde est appelé ensemble des nombres réels. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

Propriété : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration (exigible) :

On va suivre un raisonnement par l'absurde, en supposant que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal et en aboutissant à une contradiction.

Si $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, il peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et où $n \in \mathbb{N}$.
On a alors, à l'aide des produits en croix : $3a = 10^n$, c'est-à-dire que 10^n est divisible par 3, ce qui est faux.
Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Remarques :
1. On peut montrer qu'un nombre rationnel non décimal a une écriture décimale périodique. Par exemple :
   $$\frac{1}{3} = 0,3333\underline{3}\ldots \qquad \text{3 se répète}$$
   $$\frac{52}{11} = 4,727272\underline{72}\ldots \qquad \text{72 se répète}$$
2. On a démontré dans l'activité que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel (cette démonstration est exigible). On admettra qu'il en est de même pour le nombre π.
   Il existe donc des nombres réels qui ne sont pas rationnels. On dit que ce sont des nombres irrationnels.

Exercices : 122, 123 page 62 [21] [Magnard]

4.2 Inclusion des ensembles de nombres

Question flash : Exercice 27 page 54 [Magnard]

Définition : On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tout élément de A est aussi un élément de B.
On note alors : A ⊂ B.

On a donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Cette situation est résumée sur la figure 1.

Définition : On appelle nature d'un nombre le plus petit ensemble auquel il appartient.
Si cet ensemble est $\mathbb{R}$, on dit que le nombre est irrationnel.

Exercices : 105, 106 page 60 et 111 page 61 [22] [Magnard]

21. Développement décimal périodique.
22. Nature d'un nombre.

 RÉFÉRENCES

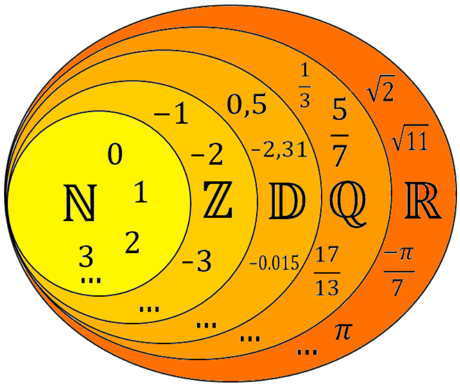

FIGURE 1 – Ensembles de nombres

Références

[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, MAGNARD, 2019

2, 3, 4, 5, 6