

Rappels de dérivation

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Nombre dérivé, fonction dérivée	2
2	Dérivée et sens de variation	3

Table des figures

1	Tangente à une courbe	2
2	Un premier exemple d'étude de variations	4
3	Un deuxième exemple d'étude de variations	4

Liste des tableaux

1	Dérivée des fonctions usuelles	2
---	--	---

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

En préliminaire au cours :

Activité : Automatismes nombre dérivé (sur fp)

1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Si la courbe \mathcal{C}_f admet au point d'abscisse a une **tangente** non parallèle à l'axe des ordonnées (voir figure 1), on dit que la fonction f est **dérivable** en a et on appelle **nombre dérivé** de f en a le **coefficient directeur** de cette tangente.

Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.

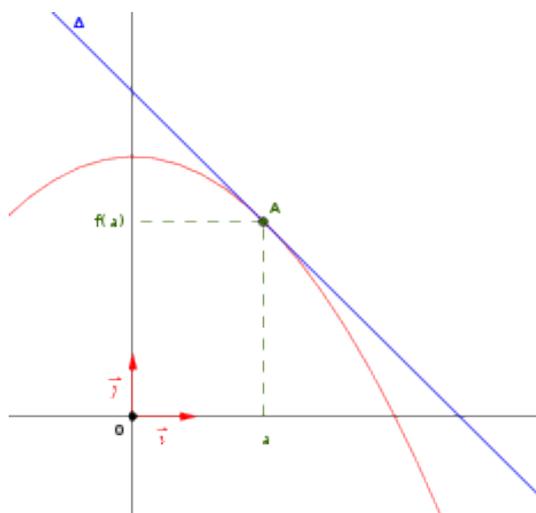


FIGURE 1 – Tangente à une courbe

Remarque : **Attention!** Il ne faut pas confondre :

- $f'(a)$: nombre dérivé de f en a , coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse a ;
- $f(a)$: image de a par f , ordonnée du point de la courbe d'abscisse a .

Exercices : Détermination graphique d'un nombre dérivé (sur fp)

Définition : Si une fonction est **dérivable pour tout réel a de l'intervalle I** , on dit qu'elle est **dérivable sur l'intervalle I** . Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de f** sur l'intervalle I la fonction qui à tout x de I associe le **nombre dérivé $f'(x)$** . On note cette fonction f' .

Remarque : On rappelle les **dérivées des fonctions usuelles** dans le tableau 1.

fonction	dérivée
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

TABLE 1 – Dérivée des fonctions usuelles

Propriété :

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
Alors la fonction (kf) est dérivable sur I et sa dérivée est kf' .
On note : $(kf)' = kf'$.
2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .
Alors la fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $f' + g'$.
On note : $(f+g)' = f' + g'$.

Exemples : 1. $f(x) = -5x^3$ alors $f'(x) = -5 \times 3x^2 = -15x^2$

2. $g(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 1$ alors : $g'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 4 \times 1 - 0 = 9x^2 - 2x + 4$

3. $h(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + x + 7 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + 7$ alors $h'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{5}{2} \times 2x + 1 + 0$

Exercices : Dérivation d'une fonction (sur fp)

2 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante** sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante** sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I .

Remarques : 1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.

2. Pour étudier **les variations d'une fonction**, il faut donc étudier **le signe de sa dérivée**. Pour cela, on pourra se reporter à la **fiche de révisions sur les études de signes**.

Méthode : Détermination des variations d'une fonction

1. Calculer la dérivée f' de la fonction.
2. Déterminer le signe de la dérivée f' .
3. Dans un **tableau de variations**, regrouper le **signe de f'** , les **variations de f** et les **valeurs d'images importantes**.
4. Utiliser la **calculatrice** pour **tracer la courbe de la fonction f** pour **vérifier la cohérence** (attention à la fenêtre choisie).

Exemples : 1. f définie sur $I = [-3; 6]$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 42$.

On a $f'(x) = -2x + 3 \times 1 - 0 = -2x + 3$.

Il faut déterminer le signe de f' .

— le coefficient directeur est -2 , donc la fonction affine correspondante est décroissante ;

— $-2x + 3 = 0 \iff -2x = -3 \iff x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} = 1,5$

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
Signe de $-2x + 3$	$+$	0	$-$

Or, ici, $x \in [-3; 6]$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-3	$1,5$	6
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de $f(x)$		$-39,75$	
	-60	\nearrow	\searrow
			-60

Remarques :

- (a) les calculs de $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(10)$ se font à la calculatrice ;
- (b) on peut vérifier les résultats en traçant la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice (voir figure 2) ;

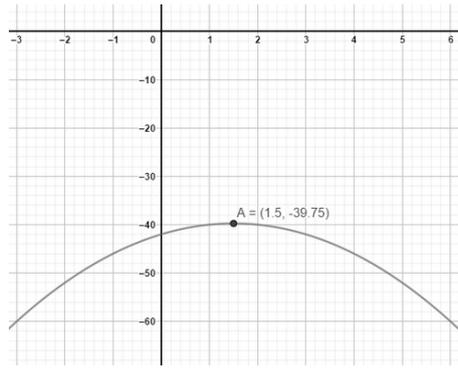


FIGURE 2 – Un premier exemple d'étude de variations

(c) f admet un **maximum** pour $x = 1,5$. Il est de $-39,75$.

2. g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

On a $g'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

On construit le tableau de signes de g' :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Signe de $3x$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Puis le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $g(x)$		\nearrow	1	\searrow	-3	\nearrow

Remarques :

(a) on peut vérifier les résultats en traçant la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice (voir figure 3) ;

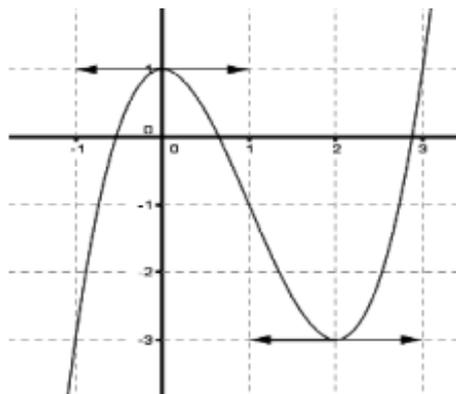


FIGURE 3 – Un deuxième exemple d'étude de variations

(b) 1 est un **maximum local** de la fonction g et -3 est un **minimum local** de la fonction g .

Exercices : Études de fonctions (sur fp)

Exercices : Applications à des problèmes économiques (sur fp)