Intervalles – Inégalités

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1 Droites des réels – Intervalles de $\mathbb{R}$

1.1 Droites des réels – Intervalles

Définition : On peut représenter l'ensemble des réels sur une droite graduée (voir figure 1).
Cette droite est appelée droites des réels.

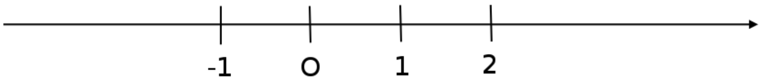


FIGURE 1 – Droite des nombres réels

Exercice : Placer le plus précisément possible les nombres $\frac{4}{3}$ et $\sqrt{2}$ sur la droite des réels
Indication : Penser aux théorèmes de THALÈS *et/ou de* PYTHAGORE.

Exemples :

1. On a représenté sur la droite des nombres réels de la figure 2 tous les nombres réels x tels que $-1 \leq x \leq 3$.

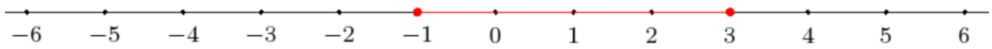


FIGURE 2 – Intervalles – Exemple 1

Cet ensemble est noté $[-1\,;\,3]$.

2. On a représenté sur la droite des nombres réels de la figure 3 tous les nombres réels x tels que $-1 < x < 3$.

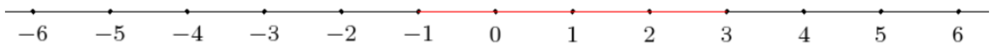


FIGURE 3 – Intervalles – Exemple 2

Cet ensemble est noté $]-1\,;\,3[$.

3. On a représenté sur la droite des nombres réels de la figure 4 tous les nombres réels x tels que $x \geq -1$. Cet ensemble est noté $[-1\,;\,+\infty[$.

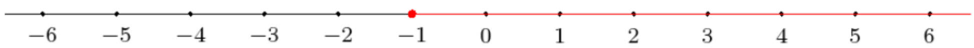


FIGURE 4 – Intervalles – Exemple 3

Remarque : « $+\infty$ » se lit « plus l'infini ».

Définition : L'ensemble des nombres réels compris entre a et b (inclus) est appelé intervalle et est noté $[a\,;\,b]$.
Plus généralement, les différents types d'intervalles sont donnés dans le tableau 1 (où a et b représentent deux réels, avec $a < b$).

Remarques :

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.
2. Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou », en « un seul morceau ».

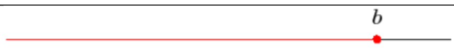
Ensemble des x vérifiant	**Représentation**	**Intervalle**
$a \leq x \leq b$		$[a\,;\,b]$
$a \leq x < b$		$[a\,;\,b[$
$a < x \leq b$		$]a\,;\,b]$
$a < x < b$		$]a\,;\,b[$
$x \geq a$		$[a\,;\,+\infty[$
$x > a$		$]a\,;\,+\infty[$
$x \leq b$		$]-\infty\,;\,b]$
$x < b$		$]-\infty\,;\,b[$

TABLE 1 – Différents types d'intervalles

3. $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres. Ce ne sont que des notations (ce qui explique qu'ils soient toujours exclus).
4. Les intervalles correspondants aux quatre premières lignes du tableau sont dits bornés.

Questions Flash : Exercices 16, 17, 18, 19 page 78 [1] [Magnard]

Exercices : 30, 31, 32, 33, 34, 35 page 78 [2] – 75, 77 page 81 [3] [Magnard]

1.2 Intersection et réunion d'intervalles

Définitions : Soit I et J deux intervalles.

1. On appelle intersection des intervalles I et J l'ensemble des nombres appartenant aux deux intervalles à la fois, c'est-à-dire à l'intervalle I *et* à l'intervalle J.
   Cet ensemble est noté $I \cap J$. Le symbole $\cap$ se lit « inter ».
2. On appelle réunion des intervalles I et J l'ensemble des nombres appartenant à l'un au moins des deux intervalles c'est-à-dire à l'intervalle I *ou* à l'intervalle J.
   Cet ensemble est noté $I \cup J$. Le symbole $\cup$ se lit « union ».

Exemple : On cherche l'intersection et la réunion des intervalles $I = [1\,;\,3]$ et $J =]2\,;\,+\infty[$ (voir figure 5).

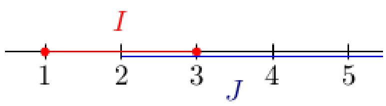


FIGURE 5 – Intersection et réunion d'intervalles

— l'intersection des intervalles I et J correspond aux nombres qui sont coloriés à la fois en rouge et en bleu.
On a donc : $[1\,;\,3] \cap]2\,;\,+\infty[=]2\,;\,3]$.

— la réunion des intervalles I et J correspond aux nombres qui sont coloriés en rouge ou en bleu.
On a donc : $[1\,;\,3] \cup]2\,;\,+\infty[= [1\,;\,+\infty[$.

1. Notion d'intervalle.
2. Notion d'intervalle.
3. Amplitude d'un intervalle.

Question Flash : Exercice 20 page 78 [4] [Magnard]
Exercices : 36, 27, 38 page 78 et 74, 76 page 81 [5] [Magnard]

2 Rappels sur les résolution d'équations

Question flash : Résoudre les équations suivantes : $2x - 3 = 7$ et $3x + 5 = -2x - 4$

Propriété : 1. Si l'on ajoute ou on retranche le même nombre au deux membres d'une égalité, cette égalité est conservée.

2. Si l'on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un même nombre non nul, cette égalité est conservée.

Méthode : Résolution d'équation du premier degré

1. En utilisant la règle 1, regrouper les termes en « x » dans le premier membre et les autres dans le second membre.
2. En utilisant la règle 2, déterminer x.
3. Conclure.

Exemples :

1. Résolution de $-2x + 22 = 0$

$$\begin{aligned}
-2x+22 &= 0 \\
-2x+22-22 &= 0-22 \quad \text{(règle 1)} \\
-2x &= -22 \\
\frac{-2x}{-2} &= \frac{-22}{-2} \quad \text{(règle 2)} \\
x &= \frac{-22}{-2} = 11 \\
S &= \{11\}
\end{aligned}$$

2. Résolution de $3x + 2 = 8 - 2x$

$$\begin{aligned}
3x+2 &= 8-2x \\
3x+2x &= 8-2 \\
5x &= 6 \\
x &= \frac{6}{5} \\
S &= \left\{\frac{6}{5}\right\}
\end{aligned}$$

3. Résolution de $\frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x - 1 &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} \\
\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x &= -\frac{1}{3} + 1 \\
\frac{6}{4}x - \frac{1}{4}x &= -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} \\
\frac{5}{4}x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

4. Intersection d'intervalles.
5. Notion d'intervalle.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \\ S &= \left\{ \frac{8}{15} \right\} \end{aligned}$$

Questions flash : 23, 24 page 78 [6] [Magnard]
Exercices : 46, 47, 48 page 79 [7] – 106, 107 page 83 [8] [Magnard]

3 Inégalités – Résolution d'inéquation

3.1 Inégalités et opérations

Questions flash : Exercices 25, 26 page 78 [9] [Magnard]
Activité : Activité 2 page 70 [10] [Magnard]

Opérations portant sur une inégalité : a, b, c et k désignent quatre nombres réels.

1. Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
   Ajouter (ou soustraire) un nombre ne change pas l'ordre de l'inégalité.
2. Si $a \leq b$ et $k > 0$ alors $k \times a \leq k \times b$
   Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif ne change pas l'ordre de l'inégalité.
3. Si $a \leq b$ et $k < 0$ alors $k \times a \geq k \times b$
   Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.

Exemple : Si $a < 5$ alors, en utilisant la règle 3, on a : $-2a > -10$ (ordre inversé).
Exercices : 41, 43, 44 page 79 et 78 page 81 [11] –79, 80, 82 page 81 [12] – 84 page 81 [13][Magnard]
Pour aller plus loin : Exercices 117 page 85 et 85, 86 page 81 [14] – 118, 119 page 85 [15] [Magnard]

3.2 Résolution d'inéquations du premier degré

Questions flash : Exercices 23, 24 page 78 [16] [Magnard]

On va adapter la méthdode de résolution des équations donnée au 2 à la résolution d'inéquations du premier degré.
Exemple : Résolution de l'inéquation $4x - 5 < 5x - 1$:

$$\begin{aligned} 4x - 5 &< 5x - 1 \\ 4x - 5 + 5 &< 5x - 1 + 5 \quad \text{(régle 1)} \\ 4x &< 5x + 4 \\ 4x - 5x &< 5x + 4 - 5x \quad \text{(régle 1)} \\ -x &< 4 \\ \frac{-x}{-1} &> \frac{4}{-1} \quad \text{(régle 3)} \\ x &> -4 \end{aligned}$$

6. Modélisation.
7. Résolution d'équations du premier degré.
8. Avec deux inconnues.
9. Manipulation d'inégalités.
10. Manipuler des inégalités.
11. Manipulation des inégalités.
12. Utilisation pour des valeurs approchées.
13. Démonstrations de règles de manipulation des inégalités.
14. Somme d'inégalités.
15. Multiplication d'inégalités.
16. Résolution d'inéquations.

On a donc ici : $S =]-4\,;\,+\infty[$

Méthode : Résolution d'inéquation du premier degré

1. En utilisant la règle 1, regrouper les termes en « x » dans le premier membre et les autres dans le second membre.
2. En utilisant les règles 2 ou 3, déterminer x.
3. Conclure.

Remarques :

1. Attention ! Lors de la résolution d'une inéquation, multiplier ou diviser par un nombre négatif change l'ordre.
2. On donnera généralement les solutions d'une inéquation sous la forme d'un intervalle.

Exercices : 72 page 80 [17] – 50, 52, 53, 54 page 79 et 91, 92, 94 page 82 [18] – 111 page 84 [19] – 112 page 84 et 122 page 85 [20] – 116 page 84 [21] [Magnard]

Question flash : Exercice 10 page 77 [22] [Magnard]

Exercices : 56, 58, 60 page 79 et 88, 90 page 82 [23] [Magnard]

3.3 Modéliser par une inéquation

Activité : Activité 4 page 71 [24] [Magnard]

Question flash : Exercice 27 page 78 [25] [Magnard]

Définition : Modéliser un problème, c'est écrire une équation ou une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème.

Remarque : La résolution de problème peut se résumer en quatre étapes :

1. Choisir l'inconnue ;
2. Modéliser le problème, c'est-à-dire exprimer les contraintes du problème en fonction de l'inconnue choisie ;
3. Résoudre l'équation ou l'inéquation correspondante à l'aide des méthodes du cours ;
4. Conclure en utilisant un vocabulaire aapté au problème.

Exercices : 61, 63, 64 page 80 et 97, 98, 99 page 82 et 114 page 84 [26] [Magnard]

4 Valeur absolue – Distance – Applications

4.1 Distance entre deux réels

Activité : Activité 1 (fp) [27]

Définition : Soit x et y deux réels.
On appelle distance entre les réels x et y la distance entre les points d'abscisses x et y sur la droite graduée.
On notera cette distance $d\,(x\,;\,y)$.

17. Rappels sur les développements.
18. Résolution d'inéquations.
19. Exercice bilan.
20. Systèmes d'inéquations.
21. Algorithme.
22. Comparaison d'expressions
23. Comparaison d'expressions
24. Modéliser par une inéquation.
25. Modéliser un problème.
26. Résolution de problèmes.
27. Distance entre deux réels.

Propriété : La distance entre deux réels est la différence entre le plus grand et le plus petit, c'est-à-dire :
— Si $x \geq y$, $d(x\,;\,y) = x - y$
— Si $x \leq y$, $d(x\,;\,y) = y - x$

Exercice : 67 page 80[28] [Magnard]

4.2 Valeur absolue

Définition : On appelle valeur absolue d'un réel x la distance entre ce nombre x et zéro.
On la note $|x|$.
D'après les résultats du 4.1, on a :
— Si $x \geq 0$, $|x| = x - 0 = x$
— Si $x \leq 0$, $|x| = 0 - x = -x$

Remarque : Attention ! $|x|$ est toujours un nombre positif (c'est une distance). Par exemple

$$\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{car } \frac{5}{3} > 0 \qquad \text{et} \qquad |-5| = -(-5) = 5 \quad \text{car } -5 < 0$$

Question flash : Exercices 28, 29 page 78[29] [Magnard]
Exercices : 65, 66, 73 page 80[30] [Magnard]

4.3 Valeur absolue et racine carrée

Question flash : Exercice 71 page 80[31] [Magnard]

Propriété : Pour tout nombre réel a, on a :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Démonstration :
Si $a \geq 0$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a = |a|$.
Si $a < 0$ alors $a^2 = (-a)^2$ avec $-a > 0$ donc $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a = |a|$.

4.4 Intervalles et valeur absolue

Théorème : Valeur absolue et distance
Pour tout réel x et y :

$$d(x\,;\,y) = |x - y|$$

Démonstration :
Si $x \geq y$: d'après 4.1 $d(x\,;\,y) = x - y$ et, comme $x - y \geq 0$, d'après 4.2, $|x - y| = x - y$.
On a donc bien dans ce cas $d(x\,;\,y) = |x - y|$.
Si $x \leq y$: d'après 4.1 $d(x\,;\,y) = y - x$ et, comme $x - y \leq 0$, d'après 4.2, $|x - y| = -(x - y) = -x + y = y - x$.
On a donc bien dans ce cas $d(x\,;\,y) = |x - y|$.

Exercices : 69, 70 page 80[32] – 115 page 84[33] [Magnard]

28. Distance entre deux nombres.
29. Valeur absolue.
30. Valeur absolue
31. Valeur absolue et racine carrée.
32. Valeur absolue et distance.
33. Algorithme.

Activité : Activité 2 (fp)[34]

> **Propriété :** Résolution d'inéquation comportant une valeur absolue
> Soit a un réel et $r > 0$.
>
> **Résolution de $|x - a| \leq r$:**
> $|x - a| \leq r$ signifie que $d\,(x\,;\,a) \leq r$.
> Les solutions sont donc les nombres situés à une distance inférieure à r du réel a (voir figure 6).
> Les solutions de $|x - a| \leq r$ sont tous les réels x de l'intervalle $[a - r\,;\,a + r]$.

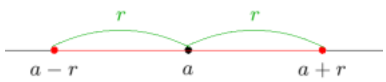


FIGURE 6 – Résolution graphique de $|x - a| \leq r$

Remarque : Dans ce cas, le nombre a est appelé centre de l'intervalle $[a - r\,;\,a + r]$ et le nombre r le rayon de cet intervalle.

Exercices : 100, 101, 102, 103 page 83[35] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, MAGNARD, 2019

3, 4, 5, 6, 7, 8

34. Équations et inéquations comportant une valeur absolue.
35. Valeur absolue et intervalles.