Suites arithmétiques
Suites géométriques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

Liste des algorithmes

1 Suites arithmétiques

Activité : Activité 2 page 14 [1] [Algomaths]

1.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples :

1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, ... est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$
est arithmétique de raison (-3).
3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3,4, 5, ... est arithmétique de raison 1.
4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.
5. Un capital (C_n) est placé à intérêts fixes de 4%, le capital initial étant $C_0 = 1000$. On a alors $C_{n+1} = C_n + 0,04 \times 1000 = C_n + 40$. C'est donc une suite arithmétique de raison 40.

Questions flash : 4, 5, 6 page 21 [2] ; 8,9 page 21 [3] [Algomaths]

1.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

— Si le premier terme est u_0, on a :

$u_1 = u_0 + r$ $\quad$ $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$ $\quad$ $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

— Si le premier terme est u_1, on a :

$u_2 = u_1 + r$ $\quad$ $u_3 = u_2 + r = (u_1 + r) + r = u_1 + 2r$ $\quad$ $u_4 = u_3 + r = (u_1 + 2r) + r = u_0 + 3r$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1. Alors :

$$u_n = u_1 + (n-1)\,r$$

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison (-2).
On a : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.
En particulier : $u_{50} = 7 - 2 \times 50 = 7 - 100 = -93$.
2. Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison $1,5$.
On a : $u_n = u_1 + (n-1)\,r = 3 + (n-1) \times 1,5 = 3 + 1,5n - 1,5 = 1,5n + 1,5$.
En particulier : $u_{50} = 1,5 \times 50 + 1,5 = 76,5$.

Question flash : 10, 11 page 21 [4] [Algomaths]

1. Une suite pour la musique.
2. Termes en progression arithmétique.
3. Modéliser par une suite arithmétique.
4. Expression en fonction de n.

Exercices : 27, 28, 29 page 22 [5] ; 31 page 22 et 50 page 25 [6] [Algomaths]

Utilisation du tableur : On veut, à l'aide d'un tableur, obtenir les 50 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 17$ et de raison -5.
On se référera au fichier `suite_arithmetique.ods` ou `suite_arithmetique.xls`.

1. On place dans la colonne `A` les 50 premiers indices en utilisant la poignée de recopie (comme le premier indice est zéro, il est normal que le 50ième soit 49) ;
2. On place la valeur du terme initial dans la cellule `B1`.
3. Dans la cellule `B2`, on place la formule `=B1-5` et on tire la poignée de recopie jusqu'à `B50`.

Programmes Python : Voici deux exemples de programmes PYTHON permettant le calcul de termes de suites arithmétiques :

1. Le programme 1 calcule le terme u_{10} de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 4.

Algorithme 1 *Suite arithmétique 1*

```
u = 5
for n in range (10) :
    u = u + 4
print (u)
```

2. Le programme 2 calcule le terme u_{10} de la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $0,5$.
Attention au décalage de termes à calculer dans la boucle, car u_1 est déjà calculé...

Algorithme 2 *Suite arithmétique 2*

```
u = 4
for n in range (9) :
    u = u + 0.5
print (u)
```

Exercices : 47 page 25 [7] ; 48, 49 page 25 [8] [Algomaths]

1.3 Somme des n premiers termes

Propriété : La somme des premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{\text{nbre de termes} \times (1^{\text{er}}\text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Remarques :

1. Si le premier terme de la suite est u_1, la somme des n premiers termes de la suite (u_n) est :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

ce que l'on peut noter : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

5. Calcul de termes.
6. Utilisation des suites arithmétiques.
7. Utilisation du tableur.
8. Programme PYTHON

2. Si le premier terme de la suite est u_0, la somme des n premiers termes de la suite (u_n) est :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

ce que l'on peut noter : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Attention au décalage dans ce cas....

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 19$ et de raison $r = 5$.
La somme des 11 premiers termes de cette suite est :

$$S_{11} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = \frac{11 \times (u_0 + u_{10})}{2}$$

avec $u_0 = 19$ et $u_{10} = u_0 + 10r = 19 + 10 \times 5 = 69$.
On a donc $S_{11} = \dfrac{11 \times (19 + 69)}{2} = 484$

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = -2$.
La somme des 20 premiers termes de cette suite est :

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = \frac{20 \times (u_1 + u_{20})}{2}$$

avec $u_1 = 3$ et $u_{20} = u_1 + 19r = 3 + 19 \times (-2) = -35$.
On a donc $S_{20} = \dfrac{20 \times (3 + (-35))}{2} = -320$

Questions flash : 12, 13 page 21 [9] [Algomaths]

Exercices : 34, 35 page 22 et 52, 53 page 25 [10] [Algomaths]

Utilisation du tableur : On peut utiliser l'instruction `=SOMME()` pour calculer une somme de termes sur un tableur. Voir le fichier `suite_arithmetique.ods` ou `suite_arithmetique.xls` pour un exemple d'utilisation.

2 Suites géométriques

Activité : Activité 3 page 15 [11] [Algomaths]

2.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples : 1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 0,75u_n \end{cases}$$

est arithmétique de raison $0,75$.

3. Un capital (C_n) est placé à intérêts composés de de 4%. On a alors $C_{n+1} = 1,04C_n$. C'est donc une suite géométrique de raison $1,04$.

Questions flash : 16, 17, 18 page 21 [12] ; 20, 21 page 21 [13] [Algomaths]

9. Somme de termes d'une suite arithmétique.
10. Utilisation des sommes de termes.
11. Un roi qui « riz ».
12. Termes en progression géométrique.
13. Modélisation par une suite géométrique.

2.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

— Si le premier terme est u_0, on a :

$$u_1 = u_0 \times q \qquad u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2 \qquad u_3 = u_2 \times q = \left(u_0 \times q^2\right) \times q = u_0 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

— Si le premier terme est u_1, on a :

$$u_2 = u_1 \times q \qquad u_3 = u_2 \times q = (u_1 \times q) \times q = u_1 \times q^2 \qquad u_4 = u_3 \times q = \left(u_1 \times q^2\right) \times q = u_1 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Alors :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison $1,1$.
On a : $u_n = u_0 \times q^n = 80 \times 1,1^n$.
En particulier : $u_{10} = 8 \times 1,1^{10} \simeq 207,5$.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 100$ et de raison $0,8$.
On a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 100 \times 0,8^{n-1}$.
En particulier : $u_{10} = 100 \times 0,8^9 \simeq 13,42$.

Question flash : 22, 23 page 21 [14] [Algomaths]

Exercices : 37, 40 page 23 et 55 page 26 [15] ; 79 page 29 [16] [Algomaths]

Utilisation du tableur : On veut, à l'aide d'un tableur, obtenir les 50 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison $1,1$.
On se référera au fichier `suite_geometrique.ods` ou `suite_geometrique.xls`.

1. On place dans la colonne `A` les 50 premiers indices en utilisant la poignée de recopie (comme le premier indice est zéro, il est normal que le 50ième soit 49) ;
2. On place la valeur du terme initial dans la cellule `B1`.
3. Dans la cellule `B2`, on place la formule `=B1*1,1` et on tire la poignée de recopie jusqu'à `B50`.

Programmes Python : Voici deux exemples de programmes PYTHON permettant le calcul de termes de suites géométriques :

1. Le programme 3 calcule le terme u_5 de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $0,97$.

Algorithme 3 *Suite géométrique 1*

```
u = 1
for n in range (5) :
    u = u * 0.97
print (u)
```

2. Le programme 4 détermine le rang à partir duquel les termes de la suite précédente sont plus petits que 0,5.

Exercices : 38, 39 page 23 ; 41 page 24 et 57 page 26 [17] [Algomaths]

Module : TP page 30 [18] [Algomaths]

14. Expression en fonction de n.
15. Utilisation des suites géométriques.
16. Un exemple de suite arithmético-géométrique.
17. Programmes Python et suites géométriques.
18. Le permis de conduire.

Algorithme 4 *Suite géométrique 2*

```
u = 1
n = 0
while u > 0.5 :
    n = n + 1
    u = u * 0.97
print (n)
```

2.3 Somme des n premiers termes

Propriété : La somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q est :

$$S = 1^{\text{er}}\text{terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$$

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$.
   La somme des 11 premiers termes de cette suite est :

   $$S_{11} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = u_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$$

   avec $u_0 = 5$ et $q = 3$.
   On a donc $S_{11} = 5 \times \dfrac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 5 \times \dfrac{-177146}{-2} = 442865$
2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison $q = 0,8$.
   La somme des 20 premiers termes de cette suite est :

   $$S_{20} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = u_1 \times \frac{1 - q^{20}}{1 - q}$$

   avec $u_1 = 10$ et $q = 0,8$.
   On a donc $S_{20} = 10 \times \dfrac{1 - 0,8^{20}}{1 - 0,8} = 10 \times \dfrac{1 - 0,8^{20}}{0,2} \simeq 49,424$

Questions flash : 24, 25 page 21 [19] [Algomaths]

Exercices : 43, 44, 45 page 24 et 59 page 27 [20] [Algomaths]

Utilisation du tableur : On peut utiliser l'instruction `=SOMME()` pour calculer une somme de termes sur un tableur. Voir le fichier `suite_arithmetique.ods` ou `suite_arithmetique.xls` pour un exemple d'utilisation.

Programmes Python : Voici deux exemples de programmes PYTHON permettant le calcul de somme de termes termes de suites géométriques :

1. Le programme 5 calcule la somme des premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $0,97$.
2. Le programme 6 détermine le rang à partir duquel la somme précédente est plus grande que 10.

Exercices : 46 page 24 et 58, 60 page 27 [21] [Algomaths]

Exercices de synthèse : 77 page 29 [22] – 78 page 29 [23] – 79 page 29 [24] [Algomaths]

19. Somme de termes d'une suite géométrique.
20. Utilisation des sommes de termes.
21. Utilisation des sommes de termes.
22. Comparer deux suites.
23. QCM
24. Une suite arithmético-géométrique

Algorithme 5 *Somme de termes 1*

```
u = 1
S =
for n in range (5) :
    u = u * 0.97
    S = S + u
print (S)
```

Algorithme 6 *Somme de termes 2*

```
u = 1
S = 1
n = 0
while S < 10 :
    n = n + 1
    u = u * 0.97
    S = S + u
print (n)
```

3 Moyennes arithmétiques et géométriques de deux nombres

Définition : Soit a et b deux nombres.

— La moyenne arithmétique de a et b est le nombre $\dfrac{a+b}{2}$

— La moyenne géométrique de a et b est le nombre $\sqrt{a \times b}$

Exemples :

— La moyenne arithmétique de 4 et 9 est $\dfrac{4+9}{2} = \dfrac{13}{2} = 7,5$

— La moyenne géométrique de 4 et de 9 est $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$

— Une quantité augmente de 10 % puis de 20 %.
Le coefficient multiplicateur lié à la première évolution est $CM_1 = 1,1$ et celui lié à la deuxième évolution est $CM_2 = 1,2$.
Le coefficient multiplicateur moyen est $CM = \sqrt{1,1 \times 1,2} = 1,149$.
Le taux moyen d'évolution est donc de +14,9 %.

Remarque : On utilise la moyenne géométrique pour calculer des taux moyen lors de deux évolutions successives.

Exercices : 2, 3 page 14 [25] et 14, 15 page 21 [26] [Algomaths]

Exercices de synthèse : 87, 88 page 33 [27] [Algomaths]

Références

[Algomaths] Collection Algomaths, Maths enseignement commun, Tle Séries Techno, Delagrave, 2020.

2, 3, 4, 5, 6, 7

25. Moyenne arithmétique.
26. Moyenne géométrique.
27. Type BAC