

Repérage

Problèmes de géométrie

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Notion de projeté orthogonal	2
2	Géométrie dans un repère	3
2.1	Repères – coordonnées d'un point	3
2.2	Coordonnées du milieu d'un segment	5
2.3	Distances dans un repère orthonormé	6

Table des figures

1	Projeté orthogonal d'un point sur une droite	2
2	Distance d'un point à une droite	3
3	Hauteur dans un triangle	3
4	Un repère quelconque	4
5	Des repères particuliers	4
6	Coordonnées d'un point	5
7	Coordonnées – exemples	5
8	Distance dans un repère orthonormé	6

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

En complément de ce chapitre, et pour aborder les exercices, on pensera à utiliser les rappels de géométrie des pages 354 à 359 du manuel. [Magnard]

1 Complément de géométrie : Notion de projeté orthogonal

Questions flash : Exercices 13 page 122¹ – 14 page 122² – 17, 18 page 122³ [Magnard]

Exercices : 20, 21 page 122; 24 page 123; 44, 47 page 124 et 84 page 127⁴ – 19 page 122 et 82 page 127⁵ [Magnard]

Exercices : 22, 23 page 122 et 25 page 123⁶ – 45, 46 page 124⁷ [Magnard]

Exercices : 51, 52 page 125 et 71 page 126⁸ [Magnard]

Activité : Activité 2 page 117⁹ [Magnard]

Définition : Soit d une droite et M un point non situé sur d (voir figure 1).

On appelle **projeté orthogonal** de M sur la droite d , le point H situé à l'intersection de la droite d et de la perpendiculaire à d passant par M .

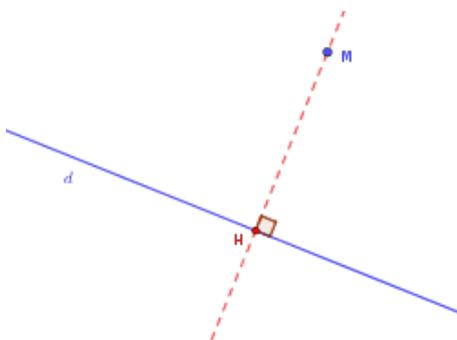


FIGURE 1 – Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Question flash : Exercice 12 page 122¹⁰ [Magnard]

Propriété : Soit d une droite, M un point non situé sur d et H le projeté orthogonal de M sur d (voir figure).

La longueur MH est la plus courte distance entre le point M et un point de la droite d . La longueur MH est appelé **distance du point M à la droite d** .

Démonstration :

Soit K un point quelconque de d , distinct de H .

Le triangle MHK est rectangle en H , donc, d'après le théorème de PYTHAGORE, on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$.

Comme $HK \neq 0$, on a donc $MK^2 > MH^2$ et, par suite, $MK > MH$.

Exercices : 2, 4, 5 page 120; 28, 30, 31 page 123 et 70 page 127¹¹ [Magnard]

1. Théorème de PYTHAGORE
2. Théorème de THALÈS
3. Trigonométrie dans un triangle rectangle
4. Applications du théorème de PYTHAGORE
5. Nature d'un quadrilatère
6. Applications du théorème de Thalès
7. Triangles semblables
8. Trigonométrie dans un triangle rectangle.
9. Plus court.
10. Projeté orthogonal.
11. Utiliser le projeté orthogonal

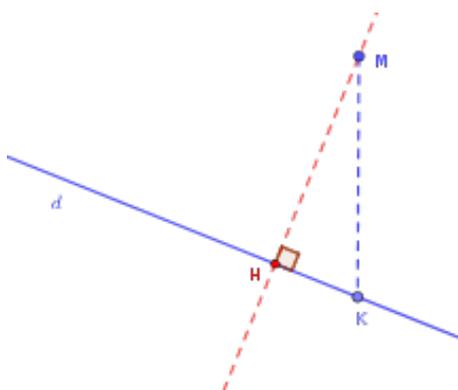


FIGURE 2 – Distance d'un point à une droite

Définition : Soit ABC un triangle quelconque (voir figure).

On appelle **hauteur issue de A** la droite qui **passé par le sommet A** et qui **coupe perpendiculairement le côté $[BC]$** au point H , projeté orthogonal de A .

La longueur AH est donc **la distance du point A à la droite (BC)** .

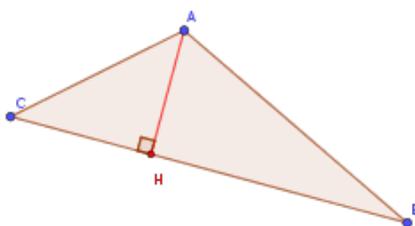


FIGURE 3 – Hauteur dans un triangle

Exercices : 7 page 121 ; 26, 27 page 123 ; 49, 50 page 125 ; 83 page 127 et 92, 94 page 128¹² – 43 page 124¹³ [Magnard]

2 Géométrie dans un repère

2.1 Repères – coordonnées d'un point

Définition : Définir un **repère du plan**, c'est choisir 3 points non alignés dans un ordre précis : O, I, J .

On note ce repère (O, I, J) (voir figure 4) et :

- le point O est l'**origine du repère** ;
- la droite (OI) est l'**axe des abscisses** et le point I donne l'unité sur cet axe ;
- la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et le point J donne l'unité sur cet axe.

Remarques : 1. L'axe des abscisses est souvent horizontal, mais ce n'est pas une obligation.

2. Si $(OI) \perp (OJ)$ (c'est-à-dire si le triangle OIJ est rectangle en O), on dit que le repère (O, I, J) est **orthogonal** (voir figure 5a).

3. Si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$ (c'est-à-dire si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O), on dit que le repère (O, I, J) est **orthonormé** (voir figure 5b).

12. Distances, aires, volumes.

13. Nature d'un quadrilatère.

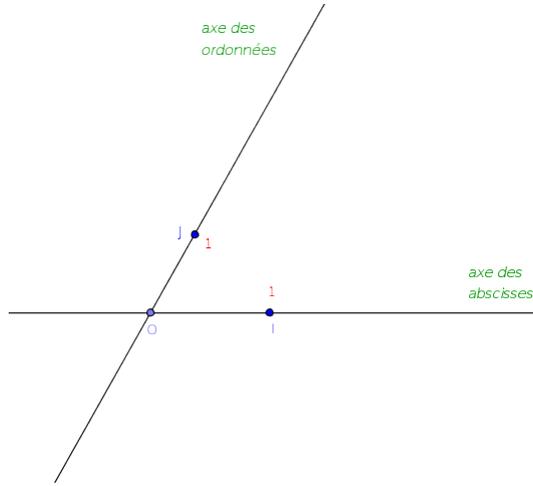


FIGURE 4 – Un repère quelconque

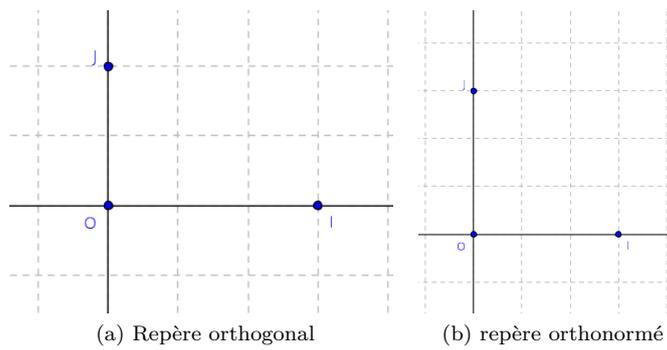


FIGURE 5 – Des repères particuliers

Définition : Soit (O, I, J) un repère quelconque du plan et M un point du plan.

Soit P le point d'intersection entre la parallèle à (OJ) passant par M et l'axe des abscisses (OI) .

Soit Q le point d'intersection entre la parallèle à (OI) passant par M et l'axe des ordonnées (OJ) . (voir figure)

L'abscisse x_M du point M est l'abscisse du point P sur la droite (OI) .

L'ordonnée y_M du point M est l'abscisse du point Q sur la droite (OJ) .

Le couple $(x_M; y_M)$ s'appelle **coordonnées** du point M dans le repère (O, I, J) .

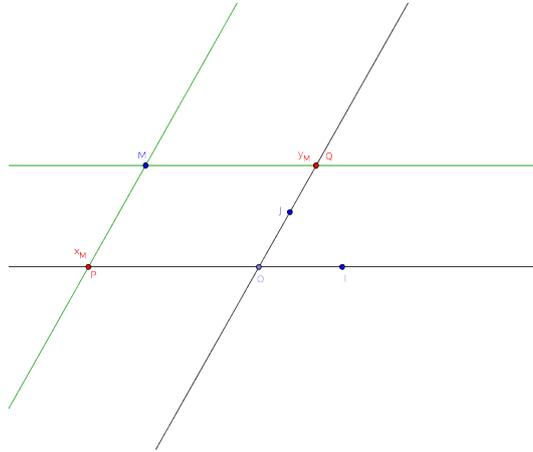


FIGURE 6 – Coordonnées d'un point

Exemples : Dans le repère (O, I, J) de la figure 7, on a : $O(0; 0)$; $I(1; 0)$; $J(0; 1)$; $A(3; 2)$; $B(-2; 3)$ et $C(-1; -2)$.

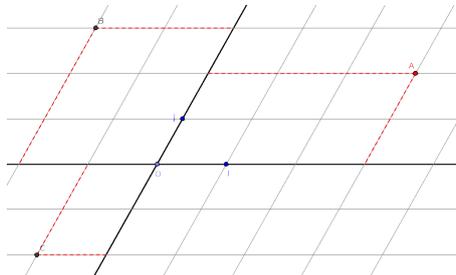


FIGURE 7 – Coordonnées – exemples

Exercice : 88 page 128¹⁴ [Magnard]

2.2 Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème : (admis)

Soit (O, I, J) un repère du plan et $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

Les coordonnées du milieu K de $[AB]$ sont :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Question flash : Exercice 16 page 122¹⁵ [Magnard]

Exercices : 32, 36 page 123 et 61, 62 page 125¹⁶ – 69 page 126¹⁷ [Magnard]

14. Changement de repère
15. Milieu d'un segment
16. Milieu d'un segment.
17. Algorithmique.

2.3 Distances dans un repère orthonormé

Théorème : Dans un repère **orthonormé**, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

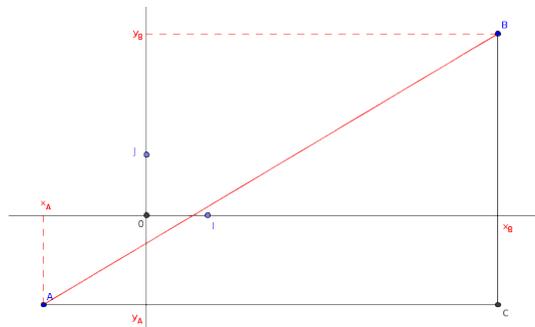


FIGURE 8 – Distance dans un repère orthonormé

Démonstration

On suppose que $x_B > x_A$ et que $y_B > y_A$ (voir figure 8)

On note C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.

Comme $(BC) \parallel (OJ)$ et $(AB) \parallel (OI)$, le triangle ABC est rectangle en C .

D'après le théorème de PYTHAGORE, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Or, $AC = x_B - x_A$ et $BC = y_B - y_A$ donc :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

et, comme AB est positif :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarque : **Attention!** Ce théorème est uniquement valable dans un repère orthonormé!

Question flash : Exercice 15 page 122¹⁸ [Magnard]

Exercices : 33, 34, 35 page 123 et 55, 56 page 125¹⁹ – 57, 58, 59, 63 et 65 page 125; 66, 72 page 126; 80 page 127 et 97 page 129²⁰ – 64 page 125 et 81 page 127²¹ – 68 page 126²² – 79 page 127 et 86 page 128²³ [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2^{de}, MAGNARD, 2019

2, 3, 5, 6

18. Calcul de distances.
19. Distances, applications.
20. Nature d'un triangle, d'un quadrilatère.
21. Utilisation du projeté orthogonal
22. Trigonométrie.
23. Avec des cercles.