

Statistiques à deux variables

Ajustement affine

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Série statistique à deux variables	2
1.1	Définition – Nuage de points	2
1.2	Point moyen	3
2	Ajustement affine	4
2.1	Définition, ajustement « au jugé »	4
2.2	Ajustement par la méthode des moindres carrés	4
2.3	Changements de variable	6

Table des figures

1	Nuage de points	3
2	Un exemple d’ajustement affine	5
3	Méthode des moindres carrés	5

Liste des tableaux

1	Répartition de notes d’une classe de Terminale STMG	2
2	Nombre d’acheteurs potentiels	4

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

En préliminaire au cours :

Exercices : QCM page 97 et questions flash ¹ [Algomaths]

1 Série statistique à deux variables

1.1 Définition – Nuage de points

Activité : Activité 1 page 98 ² [Algomaths]

Définition : On appelle **série statistique à deux variables** (ou série statistique doubles) une série statistique où deux caractères sont étudiés **simultanément**.

Remarque : Dans ce chapitre, on n'étudiera que des séries statistiques doubles dont les deux caractères étudiés sont **quantitatifs**.

Si, pour chacun des n individus de la population, on note x_i et y_i les valeurs prises par les deux caractères, on peut alors présenter la série statistique sous la forme d'un tableau :

Caractère x	x_1	x_2	\dots	x_n
Caractère y	y_1	y_2	\dots	y_n

Définition : Dans un repère **orthogonal**, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ constitue le **nuage de points** associé à la série statistique à deux variables.

Exemple : Le tableau 1 donne répartition des moyennes de 10 élèves en mathématiques et en mercatique d'une classe de terminale STMG.

Élèves	Moyenne en Mathématiques (x_i)	Moyenne en Mercatique (y_i)
Antoine	12	11
Cédric	8	10
Guillaume	11	10
Kevin	9	14
Latifa	15	13
Mohammed	10	12
Pierre	7	8
Sandra	13	11
Stéphanie	10,5	15
Tania	6	9

TABLE 1 – Répartition de notes d'une classe de Terminale STMG

Le nuage de points associé à cette série statistique est représenté sur la figure 1.

Remarques :

1. **Attention !** Il ne faut pas relirer les points entre eux.
2. On peut utiliser la calculatrice ou un tableur pour représenter un nuage de points.

Exercices : 21, 22, 24, 26 page 106 ³ – 47 page 109 ⁴ [Algomaths]

1. Équation réduite d'une droite et moyenne.
 2. Ça déménage!
 3. Nuage de points.
 4. Utilisation de la calculatrice.

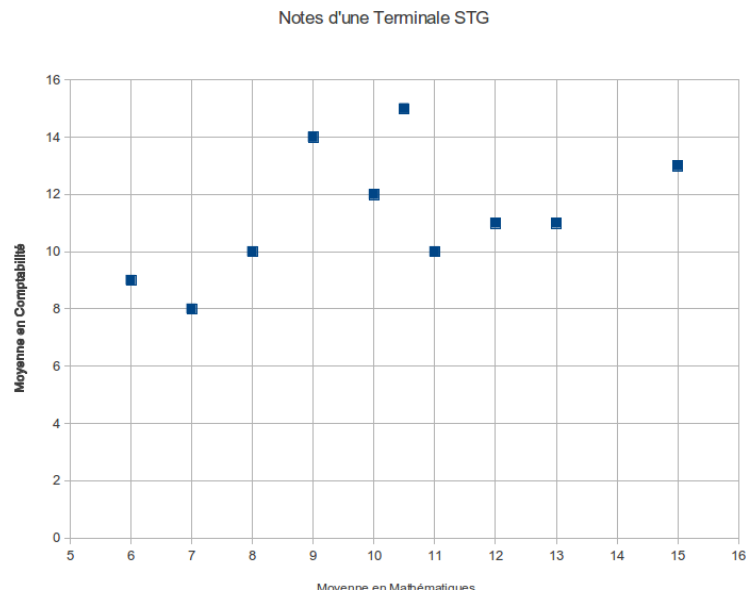


FIGURE 1 – Nuage de points

1.2 Point moyen

Définition : Le **point moyen** d'un nuage de points est le point G de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ où :

— \bar{x} représente la moyenne des x_i :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

— \bar{y} représente la moyenne des y_i :

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Exemple : On reprend les données de l'exemple précédent.

$$\bar{x} = \frac{12 + 8 + 11 + 9 + 15 + 10 + 7 + 13 + 10,5 + 6}{10} = 10,15$$

$$\bar{y} = \frac{11 + 10 + 10 + 14 + 13 + 12 + 8 + 11 + 15 + 9}{6} \simeq 11,3$$

Le point moyen est donc $G(10,15; 11,3)$.

Remarques : 1. On fait généralement figurer le point G sur le nuage de points.

2. On peut utiliser la calculatrice ou un tableur pour calculer les coordonnées du point moyen.

Questions flash : 2, 3, 4 page 105⁵ [Algomaths]

Exercices : 29, 30 page 107⁶ – 32, 33 page 107⁷ – 48 page 109⁸ [Algomaths]

5. Point moyen.

6. Utilisation de la calculatrice.

7. Utilisation de la calculatrice.

8. Retrouver le point moyen.

2 Ajustement affine d'une série statistique à deux variables

2.1 Définition, ajustement « au jugé »

Activité : Activité 3 page 99⁹ [Algomaths]

Définition : Effectuer un **ajustement** d'un nuage de points consiste à trouver une fonction dont la courbe représentative « approche » le nuage, c'est-à-dire dont la courbe passe au plus près des points du nuage. Quand le nuage présente une forme « rectiligne », la courbe cherchée est une droite d'équation $y = ax + b$. On parle alors d'**ajustement affine**.

Remarques : 1. Tous les nuages de points ne peuvent pas être approchés par un ajustement affine.

2. Même si le nuage peut être approché par un ajustement affine, il n'y a pas unicité de la droite d'ajustement.

Exercice résolu : Le tableau 2 donne le nombre d'acheteurs potentiels d'un produit donné en fonction de son prix de vente.

1. Représenter le nuage de points correspondant dans un repère orthogonal dont vous aurez choisi judicieusement les unités.
2. On choisit d'ajuster ce nuage de points par la droite d'équation $y = -12,5x + 226,25$.
 - (a) Tracer cette droite sur le graphique précédent.
 - (b) Utiliser cette droite pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels si le prix de vente est fixé à 8 €.

On a représenté le nuage de points correspondant et la droite d'ajustement sur la figure 2.

On peut utiliser cette droite d'ajustement pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels si le prix est fixé à 8 €.

Il sera de : $y = -12,5 \times 8 + 226,25 = 126,25$, soit proche de 126 personnes.

Prix x_i en euros	Nombre y_i d'acheteurs éventuels
9	120
10	100
11	90
12	70
13	60
14	50
15	40
16	30

TABLE 2 – Nombre d'acheteurs potentiels

Questions flash : 5, 6, 7, 8 page 105¹⁰ [Algomaths]

Exercices : 35, 36 (sauf 3.) page 107 et 50 page 109 (sauf 3.)¹¹ – 43, 44 page 108¹² – 51 page 109 et 52, 53 page 110¹³ – 79 page 116¹⁴ [Algomaths]

2.2 Ajustement par la méthode des moindres carrés

Activité : Activité 2 page 98¹⁵ [Algomaths]

9. Évolution de la population en Chine.
10. Ajustement affine.
11. QCM – Vrai-Faux.
12. Estimations à l'aide d'un ajustement affine.
13. Ajustements affines.
14. Type BAC.
15. Quand la fibre fait un carton.

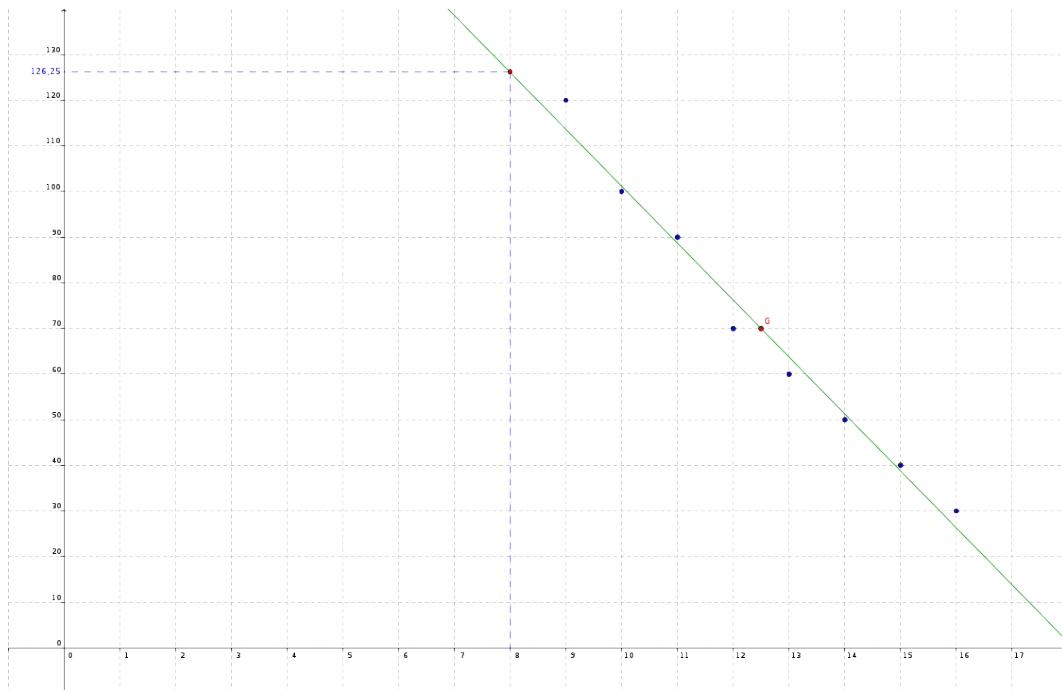


FIGURE 2 – Un exemple d'ajustement affine

Effectuer un ajustement de y en x d'un nuage de points par la **méthode des moindres carrés** consiste à trouver la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la **somme des carrés des écarts** entre les valeurs y_i observées et les valeurs $ax_i + b$ données par la droite.

On doit donc minimiser l'expression $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$.

Interprétation graphique : (voir figure 3)

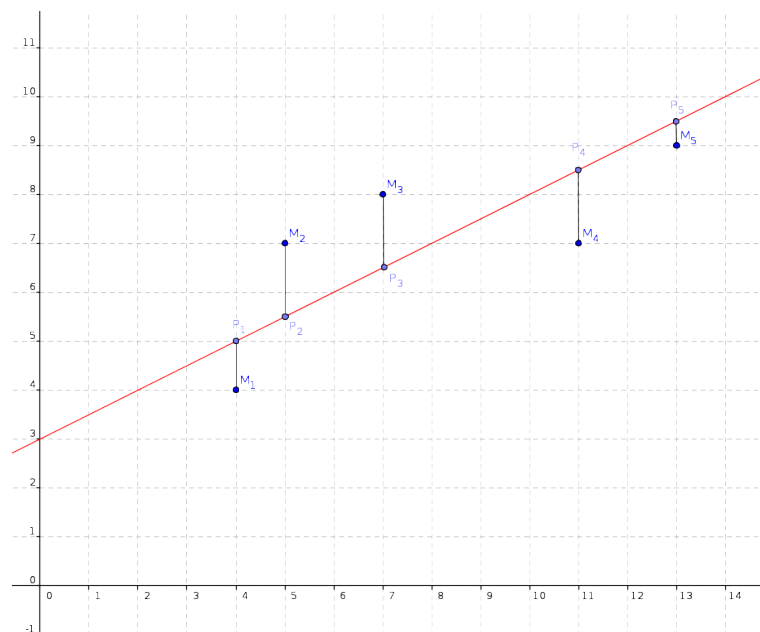


FIGURE 3 – Méthode des moindres carrés

Cela revient à minimiser la somme des carrés des distances « verticales » entre la courbe et les points du nuage :

$$(M_1 P_1)^2 + (M_2 P_2)^2 + \cdots + (M_n P_n)^2$$

La droite qui minimise cette somme est appelée **droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés**.

Remarque : On utilisera la calculatrice ou un tableur pour déterminer l'équation de la droite de d'ajustement par les moindres carrés.

Exemple : On reprend les données de l'exercice résolu du 2.1.

À l'aide de la calculatrice, on trouve que la droite de régression de y en x admet comme équation $y = -12,6x + 227,7$.

Exercices : 37, 38, 39 page 108¹⁶ – 46 page 108¹⁷ – 49 page 108¹⁸ – 42 page 78¹⁹ – 73 page 113 (A uniquement)²⁰ [Algomaths]

2.3 Changements de variable

Activité : Activité 4 page 99²¹ [Algomaths]

Pour pouvoir effectuer un ajustement de certains nuages de points, il faudra faire un **changement de variable**, c'est-à-dire changer l'un des deux caractères étudiés, en posant par exemple $z = \sqrt{y}$ ou $z = \frac{1}{y}$.

On effectuera alors un **ajustement de z en x** suivant **la méthode des moindres carrées**, et il faudra ensuite **revenir à la variable y** pour exploiter les résultats.

Questions flash : 10, 11, 12 page 105²² [Algomaths]

Exercices : 54, 55 page 110 et 56 page 111²³ – 81, 82 page 117²⁴ [Algomaths]

Références

[Algomaths] Collection Algomaths, Maths enseignement commun, Tle Séries Techno, DELAGRAVE, 2020.

2, 3, 4, 6

16. Utilisation de la calculatrice.

17. QCM.

18. Un programme Python.

19. Q.C.M.

20. Type BAC.

21. Temps de montage.

22. Effectuer des changements de variable.

23. Changements de variable.

24. Type BAC.