2 Multiplication de matrices

2.1 Matrice ligne par matrice colonne

Définition : A étant une matrice ligne de dimension $1 \times p$ et B un matrice colonne de dimension $p \times 1$, on appelle produit $A \times B$ le nombre obtenu en multipliant le premier élément de A par le premier élément de B, le deuxième élément de A par le deuxième élément de B, etc. puis en ajoutant tous ces produits :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \ldots + a_p \times b_p = \ldots$$

Remarque : Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible. Par exemple, le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'a aucun sens.

Exemple : Dans l'activité, on peut présenter le calcul du coût total pour l'entreprise si elle choisit le marché de Nantes pour satisfaire la commande du client 1 de la façon suivante :

— matrice ligne des prix sur le marché de Nantes : $\begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \end{pmatrix}$

— matrice colonne des quantités achetées par le client 1 : $\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$

Le coût total est : $\begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} =$ .....

2.2 Cas général

Définition : A étant une matrice de dimension $n \times \ldots$ et B une matrice de dimension $\ldots \times m$, on appelle produit $A \times B$ la matrice de dimension $n \times m$ obtenu en multipliant chaque ligne de A par le chaque colonne de B.
Plus précisément, le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne du produit $A \times B$ est obtenu en multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.
Si on note $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$, on a alors :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj} = \ldots$$

Remarque : Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible. Dans ce cas, le produit $A \times B$ a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

Exemple : Dans l'activité :

— matrice des prix : $P = \begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1 & 1 \\ 1,05 & 1,2 & 0,95 & 1,15 \\ 1,05 & 1,3 & 0,85 & 1,05 \\ 1,15 & 1,6 & 0,55 & 1,15 \end{pmatrix}$

— matrice des quantités : $C = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 60 \\ 30 & 50 & 10 \\ 70 & 60 & 70 \\ 60 & 50 & 40 \end{pmatrix}$

La matrice des coûts totaux est $PC = \begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1 & 1 \\ 1,05 & 1,2 & 0,95 & 1,15 \\ 1,05 & 1,3 & 0,85 & 1,05 \\ 1,15 & 1,6 & 0,55 & 1,15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 & 50 & 60 \\ 30 & 50 & 10 \\ 70 & 60 & 70 \\ 60 & 50 & 40 \end{pmatrix}$

Remarques : 1. Disposition pratique des calculs

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 30 & 50 & 60 \\ 30 & 50 & 10 \\ 70 & 60 & 70 \\ 60 & 50 & 40 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1 & 1 \\ 1,05 & 1,2 & 0,95 & 1,15 \\ 1,05 & 1,3 & 0,85 & 1,05 \\ 1,15 & 1,6 & 0,55 & 1,15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Même si le calcul de $A \times B$ est possible, il n'y a aucune raison pour que le produit $B \times A$ le soit. Et même si c'est le cas, on aura généralement $AB \neq BA$. On dit que le produit de matrices n'est pas commutatif.
3. On retrouve les autres propriétés habituelles des produits :
   — Associativité : $A(BC) = (AB)C = ABC$ et, si $k \in \mathbb{R}$, $(kA)\,B = A\,(kB) = k\,(AB)$
   — Distributivité : $A\,(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)\,C = AC + BC$
4. Les calculatrices et les tableurs permettent de calculer sur des matrices.

Exemples : Des résultats surprenants...

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, on a $AB =$ .....
   Un produit de matrice peut être nul même si aucune des deux matrices n'est nulle.
2. Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ alors $M - N =$ .....
   On a donc $A\,(M - N) =$ ..... d'où $AM - AN =$ ....., c'est-à-dire .....
   On peut avoir $AM = AN$, même si $M \neq N$.