1 Notion de matrice

1.1 Définition

Définition : Une matrice A de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.
Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij}.
La matrice A peut alors être notée $A = (a_{ij})$.

Exemples : 1. Dans l'activité, la matrice représentant les prix par marché est :

$$P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Elle est de dimension $\dots \times \dots$.
Le coefficient de la $1^{\text{ère}}$ ligne et de la $2^{\text{ème}}$ colonne est .... On le note $a_{\dots}$. On a donc : $a_{\dots} = \dots$.
De même, $a_{21} = \dots$; $a_{43} = \dots$ et $a_{35} = \dots$.

2. Les notes d'un élève en mathématiques pour le premier trimestre peuvent être données sous la forme d'une matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Elle est de dimension $\dots \times \dots$. On dit que B est un matrice ....

3. On considère la matrice suivante :

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1,05 \\ 0,9 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Elle est de simension $\dots \times \dots$. On dit que B' est une matrice carrée ....

4. Si tous les coefficients d'une matrice D sont nuls, on dit que D est une matrice .... Cette matrice est généralemlent notée 0, ou, si cela peut porter à confusion, $0_{n,p}$ pour indiquer sa dimension.

Définition : La matrice transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note A^t.
Si A est de format $n \times p$, alors A^t est de format $p \times n$.
Si l'on note $A = (a_{ij})$, alors $A^t = (a_{ji})$.

Exemples : avec les notations des exemples précédents

1. Les prix par marché dans l'activité peuvent aussi être représentés par :

$$P^t = \begin{pmatrix} 1,15 & 1,2 & 1,05 & 1,05 & 1,15 \\ 1,25 & 1,4 & 1,2 & 1,3 & 1,6 \\ 0,65 & 1 & 0,95 & 0,85 & 0,55 \\ 2 & 1 & 1,15 & 1,05 & 1,15 \end{pmatrix}$$

Elle est de dimension $\dots \times \dots$.

2. Les notes de mathématiques de l'élève peuvent aussi être représentées par :

$$B^t = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Elle est de dimension $\dots \times \dots$. On dit que B^t est une matrice ....

Remarque : Il est possible de faire du calcul matriciel à l'aide des calcultrices. Pour cela, voir l'exercice résolu page 167 [?].

Définition : On dit que deux matrices sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{14} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

1.2 Somme de deux matrices

Dans l'activité, pour déterminer la commande totale des clients, on a calculé la matrice suivante :

$$C' = \begin{pmatrix} 30+10 & 50+10 & 60+10 \\ 30+0 & 50+20 & 10+10 \\ 70+10 & 60+0 & 70+10 \\ 60+0 & 50+0 & 40+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 70 \\ 30 & 70 & 20 \\ 80 & 60 & 80 \\ 60 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

ce qui peut s'écrire :

$$C' = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 & 50 & 60 \\ 30 & 50 & 10 \\ 70 & 60 & 70 \\ 60 & 50 & 40 \end{pmatrix}}_{1^{\text{ere}}\text{commande}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}}_{2^{\text{ème}}\text{commande}} = C + A$$

Définition : On appelle somme de deux matrices A et B de même dimansion la matrice obtenue en additionnant les coefficients situés aux mêmes emplacement.
Cette matrice est notée $\mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Remarque : on retrouve les propriétés habituelles de l'addition, c'est-à-dire :
- l'associativité : $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$
- la commutativité : $A+B = B+A$
- l'élément neutre : $0+A = A$

1.3 Multiplication d'une matrice par un réel

Dans l'activité, pour calculer les nouveaux prix des produits par marché, on a calculé la matrice suivante :

$$P' = \begin{pmatrix} 1,05\times 1,15 & 1,05\times 1,25 & 1,05\times 0,65 & 1,05\times 1,2 \\ 1,05\times 1,2 & 1,05\times 1,4 & 1,05\times 1 & 1,05\times 1 \\ 1,05\times 1,05 & 1,05\times 1,2 & 1,05\times 0,95 & 1,05\times 1,15 \\ 1,05\times 1,05 & 1,05\times 1,3 & 1,05\times 0,85 & 1,05\times 1,05 \\ 1,05\times 1,15 & 1,05\times 1,6 & 1,05\times 0,55 & 1,05\times 1,15 \end{pmatrix} = 1,05\times \begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1 & 1 \\ 1,05 & 1,2 & 0,95 & 1,15 \\ 1,05 & 1,3 & 0,85 & 1,05 \\ 1,15 & 1,6 & 0,55 & 1,15 \end{pmatrix} = 1,05P$$

Définition : On appelle produit d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k.
Cette matrice est notée $k \times \mathrm{A}$ ou $k\mathrm{A}$.

Remarques :
1. On positionnera *toujours* le réel *avant* la matrice : 3A et non pas $\mathrm{A} \times 3$.
2. La matrice $(-1) \times \mathrm{A}$ est notée $-\mathrm{A}$ et est appelée matrice opposée de A. Ce qui permet de définir la soustraction de deux matrices : $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} + (-\mathrm{B})$.
3. On retrouve les règles de calculs habituelles :
   - le symétrique : $A + (-A) = A - A = 0$
   - la distribuitivité : $k(A+B) = kA + kB$
   - l'élément neutre : $0 \times A = 0$
4. La calculatrice peut effectuer ce type de calcul sur des matrices.