Fonction inverse

Christophe ROSSIGNOL[*]

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

Table des figures

---

1 Quelques rappels sur le calcul fractionnaire

1.1 Écriture sous forme de produit

Règle : $\dfrac{a \times b}{c \times d} = \dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d}$

Exemple : $\dfrac{-3}{4x} = \dfrac{-3 \times 1}{4 \times x} = \dfrac{-3}{4} \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{x}$

Exercice : En suivant la méthode de l'exemple, transformer les expressions suivantes : $\dfrac{-4}{x}$; $\dfrac{3}{x}$ et $-\dfrac{2}{3x}$

1.2 Écriture sous forme de quotient

Règle : $\dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d} = \dfrac{a \times b}{c \times d}$

Exemple : $-\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3}{4} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3 \times 1}{4 \times x} = \dfrac{-3}{4x}$

Exercice : En suivant la méthode de l'exemple, transformer les expressions suivantes : $-\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{x}$ et $4 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right)$

1.3 Écriture sous forme d'une somme

Règle : $\dfrac{a+b+c}{d} = \dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d} + \dfrac{c}{d}$

Exemple : $\dfrac{-3x^2+2x-7}{x} = \dfrac{-3x^2}{x} + \dfrac{2x}{x} - \dfrac{7}{x} = -3x + 2 - \dfrac{7}{x}$

Exercice : En suivant la méthode de l'exemple, transformer les expressions suivantes : $\dfrac{2x^2-3x+1}{x}$ et $\dfrac{-3x^2+4x-2}{x}$

1.4 Mise sous le même dénominateur

Règle : $a + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{1} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac+b}{c}$

Exemple : $3 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{3}{1} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{3x}{x} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{3x-4}{x}$

Exercice : En suivant la méthode de l'exemple, transformer les expressions suivantes : $2 - \dfrac{1}{x}$; $4 - \dfrac{2}{x^2}$ et $-5 + \dfrac{3}{x^2}$

2 La fonction inverse

Activité : Activité 1 page 36 [1] [Algomaths]

Définition : La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}/\left\{0\right\} = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Sa courbe représentative, donnée à la figure , est appelée hyperbole.

Remarques :

1. Il y a une limite à tout

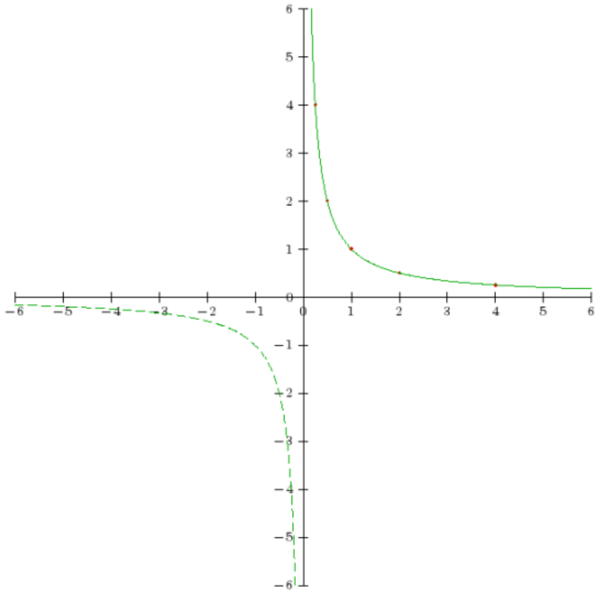

FIGURE 1 – La fonction inverse

1. La fonction inverse n'est pas définie en zéro car on ne peut pas diviser par zéro.

2. La courbe représentative de la fonction inverse est quasiment horizontale lorsque x est très grand. On dit lorsque x tend vers $+\infty$, l'axe des abscisses est asymptote à la courbe. Son équation est $y = 0$.

3. Il existe trois autres parties de la courbe de la fonction inverse qui sont quasiment des droites :

   — Lorsque x tend vers $-\infty$, l'axe des abscisses est asymptote à la courbe. Son équation est $y = 0$.
   — Lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe. Son équation est $x = 0$.
   — Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe. Son équation est $x = 0$.

   Plus précisément, on a les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

— On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, dès que x est suffisamment grand.
On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

— On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, dès que x est suffisamment petit.
On note alors :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Propriété 2 :

— On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de zéro en restant positif.
On note alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

— On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut, dès que x est suffisamment proche de zéro en restant négatif.
On note alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exercices : 2, 3, 4 page 41 ; 17, 18 page 42 et 39, 40 page 44 [2] –19, 20 page 42 et 37 page 44 [3] [Algomaths]

3 Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

3.1 Dérivée de la fonction inverse

Propriété 1 : Dérivée de la fonction inverse
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Alors f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Exemple : Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{x}$.
On a $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 + 3 \times \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = 3x^2 + 2 \times 2x - 1 + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + 4x - 1 - \frac{3}{x}$.

Exercices : 5, 6, 8, 9 page 41 et 25, 26, 28, 30 page 43 [4] – 43, 44, 46 page 44 [5] [Algomaths]

3.2 Sens de variation de la fonction inverse

On a vu que, pour la fonction inverse, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Or, comme un carré est toujours positif, $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$, et donc $f'(x) < 0$.
On en déduit le résultat suivant :

Propriété : La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ et sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On trouvera le tableau de variations de la fonction inverse, complété par ses limites, sur la figure 2.

Exemple : Un exemple d'étude de variations

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x + 60 + \frac{121}{x}$$

2. Calcul de limites.
3. Asymptotes.
4. Calcul de dérivées.
5. Mise sous le même dénominateur.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f[x]$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

FIGURE 2 – Tableau de variations de la fonction inverse

On a :

$$g(x) = x + 60 + 121 \times \frac{1}{x}$$

donc :

$$g'(x) = 1 + 0 + 121 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{121}{x^2} = \frac{x^2 - 121}{x^2} = \frac{x^2 - 11^2}{x^2} = \frac{(x-11)(x+11)}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$ (c'est un carré), $g'(x)$ est du signe de $(x-11)(x+11)$ sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		-11		11		$+\infty$
Signe de $x - 11$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x + 11$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-11)(x+11)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de g, sans oublier la valeur interdite en zéro :

x	$-\infty$		-11		0		11		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
Variations de $g(x)$		$\nearrow$	38	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	82	$\nearrow$	

avec $f(-11) = -11 + 60 + \frac{121}{-11} = 49 - 11 = 38$ et $f(11) = 11 + 60 + \frac{121}{11} = 71 + 11 = 82$

Module : Activité 3 page 37 et TP page 48 [6] [Algomaths]

Questions flash : 11, 12, 13, 14 page 41 [7] [Algomaths]

Exercices : 31, 32, 34, 35, 36 page 43 page 43 et 47, 48 page 45 [8] – 50, 51, 52 page 45 [9] [Algomaths]

Références

[Algomaths] Collection Algomaths, Maths enseignement commun, Tle Séries Techno, DELAGRAVE, 2020.

2, 4, 5

6. Notion de coût moyen.
7. Tableaux de signes.
8. Étude de variations.
9. Applications concrètes.