Forme trigonométrique
et forme exponentielle
d'un nombre complexe

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

Table des figures

Activité : Activité 1 page 44[1] [Magnard]

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1.1 Affixe d'un point

Définition : Soit $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un repère orthonormé direct et z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.

- Le point $M\,(a\,;b)$ est appelé image de z. (voir figure 1)
- On dit que M a pour affixe z.

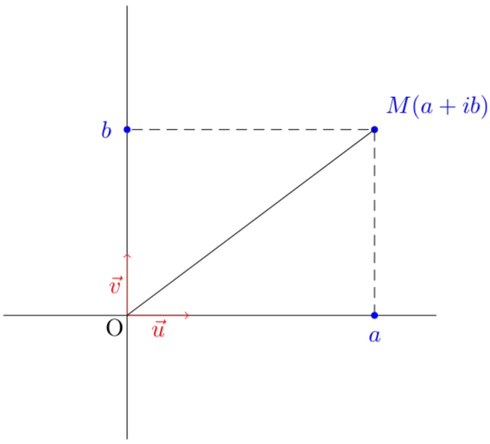

FIGURE 1 – Interprétation géométrique

Remarque : L'ensemble des nombres réels est représenté par l'axe des abscisses.
L'ensemble des imaginaires purs est représenté par l'axe des ordonnées.

Propriété : Affixe du milieu d'un segment
Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
On note I le milieu du segment $[AB]$.
Alors, l'affixe de I est :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Exercice : Démontrer cette propriété à l'aide des coordonnées du milieu d'un segment.

Exercices : 1, 3 page 47 ; 30 page 61 ; 39, 40 page 62[2] – 2 page 47 et 43 page 62[3] [Magnard]

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition : Soit $\vec{w}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
On appelle affixe de $\vec{w}$ le complexe $z = a + ib$.

Propriété 1 : Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a comme affixe $z_B - z_A$.

1. Représenter graphiquement un nombre complexe.
2. Affixe d'un point.
3. Ensembles de points.

Démonstration :
Si $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ (formes algébriques), alors $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Par suite, son affixe est :

$$z = (x_B - x_A) + i\,(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$

Remarques : Il découle facilement des règle de calcul sur les coordonnées de vecteurs que :

1. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales.
2. Si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et k un réel :
   — l'affixe de $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ est $z + z'$;
   — l'affixe de $k\overrightarrow{w}$ est kz.
3. On peut donc utiliser les affixes pour déterminer une colinéarité de vecteurs, donc pour déterminer un parallélisme ou un alignement.

Exercices : 4 page 47 ; 38, 41, 42 page 62 [4] – 44, 45, 46, 47, 48, 49 page 62 [5] [Magnard]

2 Module d'un nombre complexe

Définition : Soit $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ un repère orthonormé direct et z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
La distance OM est appelée module de z. On note $|z| = OM$.
On a donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarques :

1. Le module d'un nombre complexe est un nombre réel positif.
2. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
3. Si z est un réel, c'est-à-dire $z = a$:
   — si $a > 0$, $|z| = a$
   — si $a < 0$, $|z| = -a$
4. Si z est un imaginaire pur, c'est-à-dire $z = ib$:
   — si $b > 0$, $|z| = b$
   — si $b < 0$, $|z| = -b$
5. On obtient facilement grâce à un graphique :$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$ (voir figure 3)

Propriété : Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a :

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Démonstration :
On note $z = a + ib$ la forme algébrique du complexe z.

$$z\overline{z} = (a + ib)\,(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Propriété : Module et opérations
Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$
2. Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$
3. Si $z \neq 0$, alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$

4. Affixe d'un vecteur.
5. Configurations du plan.

Démonstration :
1. $|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z \times z' \times \overline{z} \times \overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$
Comme, de plus, tous les nombres sont des réels positifs, on a $|zz'| = |z| \times |z'|$.
2. On montre ce résultat par récurrence sur n.
Initialisation : $\left|z^0\right| = |1| = 1$ et $|z|^0 = 1$. La propriété est vérifiée au rang 0.
Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $|z^n| = |z|^n$.
On veut montrer que $\left|z^{n+1}\right| = |z|^{n+1}$

$$\left|z^{n+1}\right| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| = |z|^{n+1}$$

3. On a $z \times \frac{1}{z} = 1$ donc $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1$, c'est-à-dire $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$ et donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
De plus $\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|z' \times \frac{1}{z}\right| = |z'| \times \left|\frac{1}{z}\right| = |z'| \times \frac{1}{|z|} = \frac{|z'|}{|z|}$.

Exercices : 5 page 49, 6 page 49 ; 50, 51 page 62 [6] [Magnard]
Module : TP2 page 75 [7] [Magnard]

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Activité : Activité 2 page 44 [8] [Magnard]

3.1 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition : Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z (voir figure 2).
On appelle argument de z toute mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$. On le note $\arg(z)$. il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).
On a donc :

$$\arg(z) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right) \quad [2\pi]$$

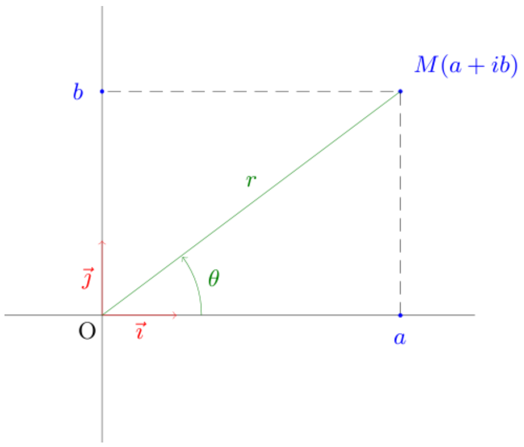

FIGURE 2 – Argument d'un nombre complexe

Remarques : 1. Si z est un réel, c'est-à-dire $z = a$:
— si $a > 0$, $\arg(z) = 0$
— si $a < 0$, $\arg(z) = \pi$

6. Calcul de modules.
7. Ensembles de JULIA, ensemble de MANDELBROT.
8. Repérer un point par un angle et une distance.

2. Si z est un imaginaire pur, c'est-à-dire $z = ib$:
   — si $b > 0$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
   — si $b < 0$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

Propriété : Argument de l'opposé et du conjugué

Soit z un complexe non nul et M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$. Par des considérations géométriques simples sur la figure 3, on obtient :

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)\ [2\pi]$$

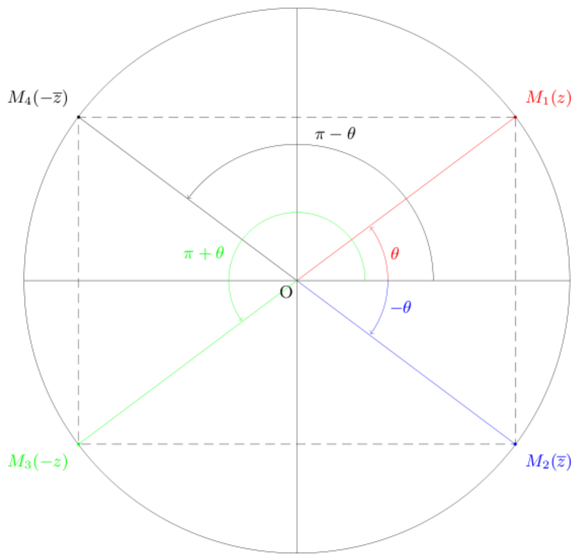

FIGURE 3 – Module et argument de l'opposé et du conjugué

Exercices : 31, 32, 34 page 61 [9] – 11, 12 page 51 et 63, 64 page 63 [10] [Magnard]

3.2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Théorème – Définition : Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme suivante :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)\ [2\pi]$$

Cette forme est appelée forme trigonométrique du complexe z.

Démonstration :
On note M le point d'affixe z, $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.
La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique en un point A (voir figure 4).
Les coordonnées de A sont $(\cos(\theta)\ ;\sin(\theta))$ et, comme $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$, les coordonnées de M sont $(r\cos(\theta)\ ;r\sin(\theta))$.
L'affixe de M est donc :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

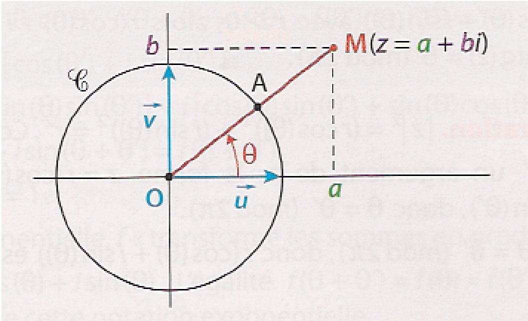

FIGURE 4 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique : Soit z un complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$ et de forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors :

— Si l'on connaît r et θ :

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

— Si l'on connaît a et b :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Exemple : Soit $z = \sqrt{3} - i$.

$$r = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc $\arg(z) = \theta = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exercices : 61 page 63 [11] – 9, 10 page 51 ; 56, 57, 58, 59, 62 page 63 [12] [Magnard]

3.3 Égalité de deux nombres complexes

Propriété : Égalité de deux complexes

Les complexes $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

Remarque : Attention ! L'hypothèse $r > 0$ est essentielle pour obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Exemples : Donner la forme trigonométrique des complexes $z_1 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

— La forme donnée pour z_1 n'est pas une forme trigonométrique : $z_1 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

On a : $z_1 = 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ avec $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$.

La forme trigonométrique de z_1 est donc : $z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, c'est-à-dire $|z_1| = 3$ et $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

9. Argument d'un nombre complexe.
10. Ensembles de points.
11. Forme trigonométrique.
12. Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique.

— La forme donnée pour z_2 n'est pas une forme trigonométrique : $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
On a : $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ avec $\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$.
La forme trigonométrique de z_2 est donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, c'est-à-dire $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exercice : 35 page 61 et 60 page 63[13] [Magnard]

3.4 Argument et opérations

Module : Compléments de trigonométrie (sur feuille polycopiée)

Propriété : Argument et opérations

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
2. Si n est un entier naturel, $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
3. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

Démonstration :

1. On note $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ les formes trigonométriques de z et de z'. On a donc :

$$\begin{cases}|z| = r\\ \arg(z) = \theta\ [2\pi]\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}|z'| = r'\\ \arg(z') = \theta'\ [2\pi]\end{cases}$$

De plus :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta')\\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right]\\ &= rr'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right]\end{aligned}$$

Donc, d'après l'unicité de la forme trigonométrique :

$$\begin{cases}|zz'| = rr'\\ \arg(zz') = \theta + \theta'\ [2\pi]\end{cases}$$

2. On montre ce résultat par récurrence sur n.
Initialisation : $\arg\left(z^0\right) = \arg(1) = 0\ [2\pi]$ et $0 \times \arg(z) = 0$. La propriété est vérifiée au rang 0.
Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.
On veut montrer que $\arg\left(z^{n+1}\right) = (n+1)\arg(z)\ [2\pi]$

$$\begin{aligned}\arg\left(z^{n+1}\right) &= \arg(z^n \times z)\ [2\pi]\\ &= \arg(z^n) + \arg(z)\ [2\pi]\\ &= n\arg(z) + \arg(z)\ [2\pi]\\ &= (n+1)\arg(z)\ [2\pi]\end{aligned}$$

3. On a $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ donc $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0\ [2\pi]$ et donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
De plus $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg\left(z' \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(z') + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$.

Exercices : 15, 16 page 53 ; 33 page 61 ; 68, 69, 70 page 64[14] – 92 page 65[15] [Magnard]

13. Détermination de formes trigonométriques.
14. Propriétés des arguments.
15. Nombres complexes et trigonométrie.

4 Forme exponentielle d'un complexe non nul

Activité : Activité 3 page 45 [16] [Magnard]

Définition : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Remarques :

1. « $\mathrm{e}^{i\theta}$ » se lit « exponentielle de $i\theta$ ».
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i(\theta+2k\pi)}$

Exemples : $\mathrm{e}^{i0} = 1$ $\quad$ $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\quad$ $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ $\quad$ $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ $\quad$ $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Propriété : Soient θ et θ' deux réels.
$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'}$ équivaut à $\theta = \theta'$ $[2\pi]$.

Définition : Tout nombre complexe z non nul, dont un argument est θ, peut s'écrire sous la forme :$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$;
Cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z.
Réciproquement, si z est un nombre complexe tel que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$

Remarques :

1. En particulier, tous les complexes de module 1 admettent une écriture de la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$.
2. La méthode de détermination d'une forme exponentielle est donc exactement la même que celle d'une forme trigonométrique.

Propriété : Calculer avec une exponentielle complexe
Soient θ et θ' deux réels.

1. $\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i\left(\theta+\theta'\right)}$
2. $\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$ et $\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i\left(\theta-\theta'\right)}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$

Remarques : 1. La démonstration de cette propriété est la même que celle du 3.4, en prenant $r = r' = 1$.

2. On retrouve les propriétés « classiques » de l'exponentielle, ce qui justifie en partie la notation.
3. L'exponentielle complexe se manipule comme une puissance, ce qui rend les calculs sur les arguments plus faciles.

Propriété 2 : Formule de Moivre
Soit θ un réel et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Remarque : Ce n'est qu'une réécriture du point 3. de la propriété précédente.

Propriété : Formule d'Euler
Soit θ un réel et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration :

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \frac{2\cos\theta}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)}{2i} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i} = \frac{2i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)$$

16. Découvrir la forme exponentielle d'un nombre complexe.

Exercices : 17, 19 page 55 ; 36, 37 page 61 ; 71, 72 page 64 [17] – 73, 74 page 64 [18] – 20 page 55 ; 25, 26 page 58 ; 75, 76 page 64 ; 93, 99 page 65 et 119 page 68 [19] – 18 page 55 ; 77 page 64 ; 96, 98 page 65 et 122 page 68 [20] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Expertes, MAGNARD, 2020

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17. Forme exponentielle d'un nombre complexe.
18. Utilisation d'un repère.
19. Utilisation de la forme exponentielle.
20. Utilisation des formules de MOIVRE et d'EULER.