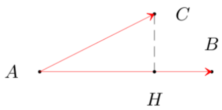
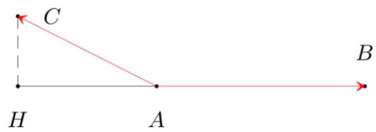
Rappel : Différentes expressions du produit scalaire du plan

- *Forme triangulaire* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$
- *Expression à l'aide de projections* : On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).
  - Si H et B sont du même côté de A alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$;
  - Si H et B sont de part et d'autre de A alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

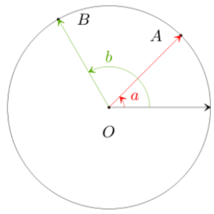




- *Expression trigonométrique* : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
- *Expression dans un repère orthonormé* : Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Exercice 1 : Formules d'addition

Soit $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ tels que :



$$\left(\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{OA}\right) = a\ [2\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{OB}\right) = b\ [2\pi]$$

On a donc $A\,(\ldots\ldots\,;\ldots\ldots)$ et $B\ (\ldots\ldots\,;\ldots\ldots)$.

1. En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, montrer que $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$.
2. (a) En remarquant que $\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$ et en utilisant les angles associés, déterminer une formule analogue pour $\cos(a+b)$.
   (b) En remarquant que $\sin(X) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)$ et en utilisant les angles associés, déterminer une formule analogue pour $\sin(a+b)$.
   (c) Déterminer enfin une formule analogue pour $\sin(a-b)$.
3. *Une application :*
   En remarquant que $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
4. Chercher maintenant les exercices 65 et 66 page 63 de votre manuel.

Exercice 2 : Formules de duplication

1. (a) En utilisant les formules d'addition, montrer que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
   (b) En utilisant l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, trouver deux autres expressions de $\cos(2x)$, l'une ne faisant intervenir que $\cos x$, et l'autre que $\sin x$.
2. Par un raisonnement analogue, trouver une expression de $\sin(2x)$.
3. En utilisant ces formules, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. Chercher maintenant l'exercice 67 page 63 de votre manuel.

Formules d'addition :			**Formules de duplication :**		
$\cos(a-b)$	$=$	....	$\cos(2x)$	$=$	....
$\cos(a+b)$	$=$	....		$=$	....
$\sin(a-b)$	$=$	....		$=$	....
$\sin(a+b)$	$=$	....	$\sin(2x)$	$=$	....