

Proportions

Évolutions en pourcentage

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Proportion – Part en pourcentage	2
1.1	Ensemble de référence	2
1.2	Proportion de proportion	2
2	Pourcentages d'évolution	2
2.1	Différentes façons d'exprimer une variation	2
2.2	Lien en pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur	3
2.3	Évolutions successives	4
2.4	Évolution réciproque	4

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

1 Proportion – Part en pourcentage

1.1 Ensemble de référence

Question flash : Exercices 17 page 276¹ et 11 page 276² [Magnard]

Définition : Soit A un ensemble pris comme **ensemble de référence**.
Soit B une partie de l'ensemble A , c'est-à-dire $B \subset A$.
La **proportion** de B dans l'ensemble A est le nombre p tel que :

$$p = \frac{\text{nbre d'élèments de } B}{\text{nbre d'élèments de } A}$$

Exemple : On reprend l'énoncé de l'exercice 17 page 276

La proportion d'étudiants pratiquant le piano est $p = \frac{320}{500} = \frac{16}{25}$.

Remarques :

- On peut exprimer cette proportion de différentes manières :
 - sous forme d'une **fraction irréductible** : $p = \frac{16}{25}$
 - sous forme **décimale** : $p = 0,64$
 - sous forme d'un **pourcentage** : $p = \frac{64}{100} = 64\%$
- Avant de calculer ou d'utiliser une proportion, il est donc *essentiel* de connaître l'ensemble de référence.

Exercices : 18, 19 page 276 et 44 page 278³ – 20, 21 page 276 ; 42, 43 page 278 et 66 page 280⁴ [Magnard]

1.2 Proportion de proportion

Activité : Activité 1 page 272⁵ [Magnard]

Propriété : On considère trois ensembles A , B et C emboîtés, c'est-à-dire $C \subset B \subset A$.
Soit p la **proportion de B dans l'ensemble A** .
Soit p' la **proportion de C dans l'ensemble B** .
Alors, la **proportion de C dans l'ensemble A** est $p \times p'$.

Exemple : Dans l'activité 1 page 270 :

- La proportion de femmes **parmi les adhérents** est $p = \frac{115}{200} = \frac{23}{40} = 0,575 = 57,5\%$;
 - la proportion des femmes de 18 à 30 ans **parmi les femmes** est $p' = \frac{60}{115} = \frac{12}{23} \simeq 0,522 = 52,2\%$
- La proportion des femmes de 18 à 30 ans parmi les adhérents est donc $p \times p' = \frac{23}{40} \times \frac{12}{23} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$

Question flash : Exercice 12 page 276⁶ [Magnard]

Exercices : 1, 2 page 274 ; 23, 24 page 276 et 46, 47 page 278⁷ [Magnard]

2 Pourcentages d'évolution

2.1 Différentes façons d'exprimer une variation

Activité : Activité 2 page 270⁸ [Magnard]

- Détermination d'une proportion.
- Utilisation d'une proportion.
- Calculer une proportion.
- Utiliser une proportion.
- Proportion de proportion.
- Proportion de proportion.
- Proportion de proportion.
- Variations absolue et relative.

Définition :

On considère une quantité passant de la valeur **initiale** V_1 à la valeur **finale** V_2 .

— La **variation absolue** est la quantité $\Delta V = V_2 - V_1$.

— La **variation relative** est la quantité (sans unité) :

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1}$$

— Le **pourcentage d'évolution** est la variation relative exprimée en pourcentage.

Remarques :

1. On peut avoir des augmentations de plus de 100 % mais pas de diminutions de plus de 100 % .
2. — Pour une hausse ($V_2 > V_1$), la variation absolue, la variation relative et l'évolution en pourcentage sont positifs ;
— Pour une baisse ($V_2 < V_1$), la variation absolue, la variation relative et l'évolution en pourcentage sont négatifs.

Exercices : 26, 27 page 277 et 48, 49, 50 page 278⁹ [Magnard]

2.2 Lien en pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur

Définition : Le **coefficient multiplicateur** est le nombre (sans unité) par lequel il faut multiplier V_1 pour obtenir V_2 . Il est noté CM . On a donc :

$$V_2 = CM \times V_1 \quad \text{soit} \quad CM = \frac{V_2}{V_1}$$

Remarques :

- Pour une hausse ($V_2 > V_1$), le coefficient multiplicateur est plus grand que 1 ;
- Pour une baisse ($V_2 < V_1$), le coefficient multiplicateur est compris entre 0 et 1.

Exemple : Un adolescent mesure $V_1 = 1,60$ m en arrivant au lycée. Au cours de l'année de Seconde, sa taille augmente de 5%. À la fin de la Seconde, sa taille sera :

$$V_2 = 1,60 + 1,60 \times \frac{5}{100} = 1,60 + 1,60 \times 0,05 = 1,68 \text{ m}$$

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} V_2 &= 1,60 + 1,60 \times \frac{5}{100} \\ &= V_1 + V_1 \times \frac{5}{100} \\ &= V_1 \left(1 + \frac{5}{100} \right) \end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur est donc : $CM = \frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$. Ce résultat se généralise :

Propriété :

- **Augmenter** une quantité de $t\%$ revient à la multiplier par $CM = 1 + \frac{t}{100}$.
- **Diminuer** une quantité de $t\%$ revient à la multiplier par $CM = 1 - \frac{t}{100}$.

Exemples :

- Une **augmentation** de **50 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{50}{100} = 1,5$.
- Une **augmentation** de **5 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
- Une **diminution** de **75 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{75}{100} = 0,25$.
- Une **diminution** de **5 %** donne un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{5}{100} = 0,95$.

Remarques :

9. Variations absolues et relatives.

- Il est plus facile de calculer le résultat après évolution en utilisant le coefficient multiplicateur. En reprenant l'exemple précédent, on a $V_2 = CM \times V_1 = 1,05 \times 1,6 = 1,68$.
- La propriété précédente permet aussi de retrouver le pourcentage d'évolution à partir du coefficient multiplicateur :
 - $CM = 1,7$ correspond à une augmentation de 70 % ;
 - $CM = 1,07$ correspond à une augmentation de 7 % ;
 - $CM = 1,856$ correspond à une augmentation de 85,6 % ;
 - $CM = 3$ correspond à une augmentation de 200 % ;
 - $CM = 0,6$ correspond à une diminution de 40 % ;
 - $CM = 0,82$ correspond à une diminution de 18 % .

Questions flash : Exercices 13, 14 page 276¹⁰ [Magnard]

Exercices : 28, 29, 30, 31 page 277¹¹ – 33 page 277 ; 51, 52 page 278 ; 54 page 279 et 65, 67 page 280¹² [Magnard]

2.3 Évolutions successives

Activité : Activité 3 page 271¹³ [Magnard]

Propriété : Lors d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient.

$$V_1 \xrightarrow{CM_1} V_2 \xrightarrow{CM_2} V_3 \quad \text{alors} \quad CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$$

Remarque : Les pourcentages d'évolution ne s'additionnent jamais. Pour trouver l'évolution globale, il faut utiliser les coefficients multiplicateurs.

Exemple : Une quantité augmente de 10 % puis baisse de 30 %.

Le coefficient multiplicateur global sera $CM_{\text{global}} = 1,1 \times 0,7 = 0,77$, soit une baisse globale de 23 %.

Question flash : Exercice 15 page 276¹⁴ [Magnard]

Exercices : 5 page 274 ; 35, 36 page 277 ; 55, 56, 57 page 279 et 68, 69 page 280¹⁵ [Magnard]

2.4 Évolution réciproque

Activité : Activité 4 page 271¹⁶ [Magnard]

Définition : Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 , on appelle **taux d'évolution réciproque** le taux d'évolution permettant de passer de V_2 à V_1 .

Remarque : **Attention !** L'évolution réciproque d'une hausse de 5 % n'est pas une baisse de 5 %. En effet, le coefficient multiplicateur global sera :

$$CM_{\text{global}} = 1,05 \times 0,95 = 0,9975$$

Cela correspond donc à une baisse globale de 0,25 %. On n'est donc pas revenu à la valeur de départ.

Propriété : On considère une évolution de coefficient multiplicateur CM .

Le coefficient multiplicateur de l'**évolution réciproque** est :

$$CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{CM}$$

Question flash : Exercice 16 page 276¹⁷ [Magnard]

Exercices : 5, 6 page 275 ; 38, 39 page 277 et 60, 61 page 279¹⁸ [Magnard]

- Coefficient multiplicateur et évolution en pourcentage.
- Coefficient multiplicateur et évolution en pourcentage.
- Utilisation du coefficient multiplicateur.
- Évolutions successives, coefficient multiplicateur global.
- Évolutions successives.
- Évolutions successives.
- Évolutions réciproques.
- Taux d'évolution réciproque.
- Évolutions réciproques.

Références

[Magnard] Maths 2^{de}, MAGNARD, 2019

2, 3, 4