

Calcul algébrique Résolution d'équations

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Équations se ramenant à un produit nul	2
1.1	Cas d'un produit nul	2
1.2	Factoriser à l'aide d'un facteur commun	2
1.3	Factoriser à l'aide d'identités remarquables	2
1.4	Équations se ramenant à un produit nul	3
2	Équations se ramenant à un quotient nul	4
2.1	Cas d'un quotient nul	4
2.2	Expressions algébriques comportant des quotients	4
2.3	Équations se ramenant à un quotient nul	5

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

1 Équations se ramenant à un produit nul

1.1 Cas d'un produit nul

Théorème 1 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si un au moins des facteurs est nul.

Exemple : Résoudre $(3x + 1)(x - 5) = 0$.

$$\begin{aligned} 3x + 1 = 0 & \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0 \\ x = -\frac{1}{3} & \quad \quad \quad x = 5 \\ S = \left\{-\frac{1}{3}; 5\right\} \end{aligned}$$

Exercices : 7 page 98 ; 44 page 101 ; 74 page 103¹ [Magnard]

Remarque : Nous allons utiliser cette méthode pour résoudre des équations plus complexes. Mais pour cela, il sera nécessaire de transformer les expressions en les factorisant, c'est-à-dire en transformant les sommes en produits.

1.2 Factoriser à l'aide d'un facteur commun

On a déjà utilisé la distributivité de la multiplication sur l'addition pour développer des expressions :

$$A(B + C) = AB + AC$$

Si l'on écrit cette égalité dans l'autre sens, elle devient une technique de factorisation, si l'on détermine un facteur commun (ici A) :

$$AB + AC = A(B + C)$$

Exemples :

1. $A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$

$$\begin{aligned} A &= 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x) \\ &= (2 + 3x)[3 - (5 + 2x)] \\ &= (2 + 3x)(3 - 5 - 2x) \\ &= (2 + 3x)(-2 - 2x) \end{aligned}$$

2. $B = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$

$$\begin{aligned} B &= (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x) \\ &= (2 - 5x)(2 - 5x) - (2 - 5x)(1 + x) \\ &= (2 - 5x)[(2 - 5x) - (1 + x)] \\ &= (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x) \\ &= (2 - 5x)(1 - 6x) \end{aligned}$$

Exercices : 36, 37 page 100 et 62 page 102² [Magnard]

1.3 Factoriser à l'aide d'identités remarquables

Rappel : Soient a et b deux réels. Alors :

Carré d'une somme : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Carré d'une différence : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Différence de deux carrés : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1. Produit nul

2. Factoriser à l'aide d'un facteur commun

Remarque : Nous avons pour l'instant utilisé ces identités remarquables pour *développer*, en les lisant *de la gauche vers la droite*. En les lisant maintenant *de la droite vers la gauche*, elles vont nous permettre de **factoriser**.

Exemples :

$$1. A = x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x - 1)^2$$

$$2. B = 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x - 3)^2$$

$$3. C = 9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2)$$

$$4. D = (3x + 1)^2 - 49 = (3x + 1)^2 - 7^2 = [(3x + 1) + 7][(3x + 1) - 7] = (3x + 1 + 7)(3x + 1 - 7) = (3x + 8)(3x - 6)$$

Exercices : 38 page 100 et 63, 66 page 102³ - 3, 4 page 97; 39 page 100; 65 page 102 et 118 page 107⁴ [Magnard]

1.4 Équations se ramenant à un produit nul

Exemples :

$$1. \text{ Résoudre } x^2 - 4x + 3 = x + 3.$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 - x - 3 &= 0 \\ x^2 - 5x &= 0 \\ x(x - 5) &= 0 \\ x = 0 &\text{ ou } x - 5 = 0 \\ &x = 5 \end{aligned}$$

$$S = \{0; 5\}$$

$$2. \text{ Résoudre } (2x + 1)^2 = 16$$

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 &= 16 \\ (2x + 1)^2 - 16 &= 0 \\ (2x + 1)^2 - 4^2 &= 0 \\ [(2x + 1) + 4][(2x + 1) - 4] &= 0 \\ (2x + 1 + 4)(2x + 1 - 4) &= 0 \\ (2x + 5)(2x - 3) &= 0 \\ 2x + 5 = 0 &\text{ ou } 2x - 3 = 0 \\ 2x = -5 & \qquad 2x = 3 \\ x = -\frac{5}{2} & \qquad x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

Méthode : 1. Se ramener à $P(x) = 0$.

(Tout regrouper dans le premier membre)

2. Factoriser $P(x)$.

(Pour se ramener à un produit nul)

3. Employer le **Théorème 1** et conclure.

Exercices : 8, 9, 10 page 98; 46, 48 page 101 et 75 page 103⁵ - 76, 78, 80, 82, 83 page 103⁶ - 106, 107, 109 page 106⁷ [Magnard]

3. Factoriser à l'aide d'une identité remarquable
4. Factorisations diverses.
5. Équations se ramenant à un produit.
6. Application aux fonctions.
7. Exercices-bilan.

2 Équations se ramenant à un quotient nul

2.1 Cas d'un quotient nul

Question flash : 27, 28 page 100⁸ [Magnard]

Théorème 2 : Un **quotient** est **nul** si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

Exemple : Résoudre $\frac{3x+1}{x-5} = 0$.

Il faut que $x - 5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 5$.

On se ramène alors en utilisant le **Théorème 2** à $3x + 1 = 0$, soit $x = -\frac{1}{3}$.

La valeur obtenue étant **différente de la valeur interdite** 5, on a $S = \{-\frac{1}{3}\}$.

Exercices : 11 page 99 ; 50 page 101 et 88 page 104⁹ – 90 page 104¹⁰ [Magnard]

Remarque : Nous allons utiliser cette méthode pour résoudre des équations plus complexes. Mais pour cela, il sera nécessaire de *transformer* les expressions en les mettant **sous le même dénominateur**.

2.2 Expressions algébriques comportant des quotients

Rappels :

— On ne peut **additionner** des fractions que si **elles ont le même dénominateur** :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

— pour **simplifier** des fractions, il faut le même **facteur multiplicatif au numérateur et au dénominateur** :

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

Exemples : Mettre sous le même dénominateur les expressions suivantes :

1. $A = 5 + \frac{1}{2x+10}$

Il faut que $2x + 10 \neq 0$, c'est-à-dire $2x \neq -10$ et enfin $x \neq -5$.

$$\begin{aligned} A &= 5 + \frac{1}{2x+10} \\ &= \frac{5(2x+10)}{2x+10} + \frac{1}{2x+10} \\ &= \frac{5(2x+10) + 1}{2x+10} \\ &= \frac{10x + 50 + 1}{2x+10} = \frac{10x + 51}{2x+10} \end{aligned}$$

2. $B = 10 - \frac{x+2}{x-3}$

Il faut que $x - 3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$.

$$\begin{aligned} B &= 10 - \frac{x+2}{x-3} \\ &= \frac{10(x-3)}{x-3} - \frac{x+2}{x-3} \\ &= \frac{10(x-3) - (x+2)}{x-3} \\ &= \frac{10x - 30 - x - 2}{x-3} = \frac{9x - 32}{x-3} \end{aligned}$$

8. Équations quotient nul.

9. Résolutions d'équations quotients.

10. Programme Python.

$$3. C = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+4} + 7$$

Il faut que $x \neq 0$ et que $x + 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $x \neq -4$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x} - \frac{2}{x+4} + 7 \\ &= \frac{1 \times (x+4)}{x(x+4)} - \frac{2x}{x(x+4)} + \frac{7x(x+4)}{x(x+4)} \\ &= \frac{x+4-2x+7x(x+4)}{x(x+4)} \\ &= \frac{-x+4+7x^2+28x}{x(x+4)} = \frac{7x^2+27x+4}{x(x+4)} \end{aligned}$$

Remarques :

1. Lors de la **mise sous le même dénominateur**, attention **aux signe moins devant une fraction** (voir exemple 2).
2. Lorsqu'il y a **plusieurs fractions de dénominateurs différents**, on prend souvent **le produit des dénominateurs** comme dénominateur commun.

Exercices : 41, 42 page 101 ; 72 page 102 ; 73 page 103 et 108 page 106¹¹ – 40, 43page 101 et 71 page 102¹² [Magnard]

2.3 Équations se ramenant à un quotient nul

Exemples :

$$1. \text{ Résoudre l'équation } \frac{2x+1}{x+5} = 4.$$

Il faut que $x + 5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -5$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+5} - 4 &= 0 \\ \frac{2x+1}{x+5} - \frac{4(x+5)}{x+5} &= 0 \\ \frac{2x+1-4(x+5)}{x+5} &= 0 \\ \frac{2x+1-4x-20}{x+5} &= 0 \\ \frac{-2x-19}{x+5} &= 0 \\ -2x-19 &= 0 \\ -2x &= 19 \\ x &= -\frac{19}{2} \end{aligned}$$

La valeur obtenue étant **différente de la valeur interdite** -5 , on a $S = \left\{-\frac{19}{2}\right\}$.

$$2. \text{ Résoudre l'équation } \frac{x^2+3x}{x+3} = 3.$$

11. Simplifier des expressions fractionnaires.

12. Réduire des expressions fractionnaires.

Il faut que $x + 3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -3$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{x + 3} - 3 &= 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{x + 3} - \frac{3(x + 3)}{x + 3} &= 0 \\ \frac{x^2 + 3x - 3(x + 3)}{x + 3} &= 0 \\ \frac{x^2 + 3x - 3x - 9}{x + 3} &= 0 \\ \frac{x^2 - 9}{x + 3} &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 - 3^2 &= 0 \\ (x - 3)(x + 3) &= 0 \\ x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0 \\ x = 3 \quad \quad \quad x = -3 \end{aligned}$$

Mais, comme -3 est **une valeur interdite**, on obtient $S = \{3\}$.

Méthode : 1. Exclure les valeurs interdites.
(celles qui annulent le dénominateur)

2. Se ramener à un quotient nul.

(en regroupant tous les termes dans le premier membre)

3. Tout réduire au même dénominateur.

4. Résoudre l'équation « numérateur=0 » en utilisant si nécessaire la méthode du 1.4.

5. Vérifier que les valeurs obtenues ne soient pas des valeurs interdites, qu'il faudrait alors exclure de l'ensemble des solutions.

Remarques :

1. Dans le premier exemple, on aurait pu rendre les calculs plus faciles en utilisant les « **produits en croix** » lorsque deux fractions sont égales :

$$\begin{aligned} \frac{2x + 1}{x + 5} &= 4 \\ \frac{2x + 1}{x + 5} &= \frac{4}{1} \\ (2x + 1) \times 1 &= 4(x + 5) \\ 2x + 1 &= 4x + 20 \\ -2x &= 19 \\ x &= -\frac{19}{2} \end{aligned}$$

2. Dans le deuxième exemple, on aurait pu être plus rapide si l'on avait pensé à **réduire la fraction** :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x}{x + 3} &= 3 \\ \frac{x(x + 3)}{x + 3} &= 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Exercices : 13, 14 page 99; 51, 52 page 101 et 86, 87 page 104¹³ – 91, 92 page 104¹⁴ – 110 page 106¹⁵[Magnard]

13. Équations se ramenant à un quotient nul.

14. Utilisation en géométrie.

15. Application en économie.

Références

[Magnard] Maths 2^{de}, MAGNARD, 2019

2, 3, 4, 5, 6