

Probabilités conditionnelles

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Probabilités conditionnelles – Arbre de probabilité	2
1.1	Rappels sur les probabilités conditionnelles	2
1.2	Arbre de probabilité	2
2	Événements indépendants	3

Table des figures

1	Arbre de probabilités	2
---	---------------------------------	---

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

1 Probabilités conditionnelles – Arbre de probabilité

1.1 Rappels sur les probabilités conditionnelles

Exercice : 19 page 128¹ 1

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω , avec $p(A) \neq 0$.

La **probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé** (ou, plus simplement, **B sachant A**) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques : 1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :

$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

2. $P_A(B)$ représente la **probabilité de l'événement B dans l'univers A** .

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Exercices : 2, 3 page 127 et 20 page 128² [Algomaths]

1.2 Arbre de probabilité

Activité : Activité 1 page 120³ [Algomaths]

On utilise souvent un arbre de probabilités pour résumer une situation aléatoire donnée. Vous en trouverez un exemple sur la figure 1.

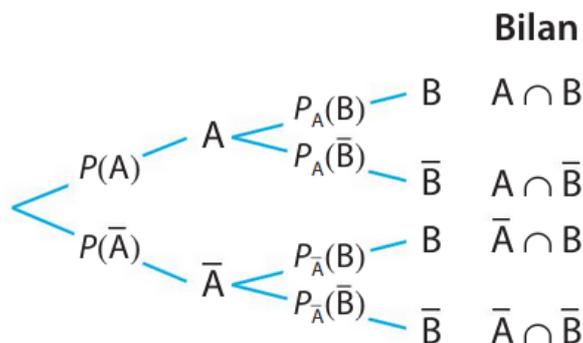


FIGURE 1 – Arbre de probabilités

Vocabulaire :

- Une **branche** est un segment reliant deux événements. À chaque branche, on associe la **probabilité de l'événement qui y mène** ;
- un **noeud** est un croisement de plusieurs branches ;
- un **chemin** est une succession de branches du noeud initial à une des extrémités de l'arbre ;
- l'**événement bilan**, situé à l'extrémité du chemin, est **l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin**.

1. Vocabulaire des probabilités.
 2. Probabilités conditionnelles.
 3. Un drôle d'arbre.

Exemple : Sur la figure 1, le chemin $\bar{A} - B$ correspond à l'événement bilan $\bar{A} \cap B$.

En utilisant la Propriété 1, on peut calculer sa probabilité :

$$P(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

Ce calcul revient à multiplier les probabilités sur les branches. Ce résultat se généralise.

Utilisation d'un arbre de probabilité :

- la **somme des probabilités** issues d'un **même nœud** est égal à 1 ;
- la **probabilité d'un événement** représenté par un **chemin** est égal au **produit des probabilités des branches** qui le composent (c'est la propriété 1) ;
- la **probabilité d'un événement** est égal à la **somme des probabilités de tous les chemins** qui y aboutissent .

Exemple : Sur la figure 1, la probabilités de l'événement B est égal à la somme des probabilités suivante :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

Vette formule est appelée **formule des probabilités totales**.

Exercices : 4, 5 page 127⁴ – 6, 7 page 127; 16, 17 page 128⁵ – 8, 9, 10, 12 page 127; 21 page 128⁶ [Algomaths]

Activité : Activité 2 page 120⁷ [Algomaths]

Exercices : 22 page 128; 36 page 131; 41 page 132; 72 page 138 et 75 page 139⁸ – 37, 38 page 131⁹ [Algomaths]

2 Événements indépendants

Activité : Activité 4 page 121¹⁰ [Algomaths]

Définition : A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

On dit que A et B sont **indépendants** si $P_A(B) = p(B)$ ou $P_B(A) = p(A)$.

Remarques :

1. Il suffit de vérifier une seule des deux égalités pour que les événements soient indépendants.
2. Deux événements sont donc indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de l'autre.

Propriété : A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : Ceci est dû au fait que $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$, avec $P_A(B) = p(B)$.

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

On note :

l'événement A : « la carte est une dame »

l'événement B : « la carte est un cœur »

On a : $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

De plus, l'événement $A \cap B$ est « obtenir la dame de cœur » donc $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

On a $p(A) \times p(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = p(A \cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Exercices : 13, 14, 15 page 127; 24, 27, 29 page 129 et 43, 44 page 132¹¹ – 25, 26 page 129 et 42 page 132¹² – 30, 33, 34 page 130; 47, 48 page 133; 73 page 138 et 74, 76 page 139¹³ [Algomaths]

4. Lire et compléter un arbre de probabilité.
5. Calculs de probabilités à partir d'un arbre.
6. Utilisation d'un arbre de probabilité.
7. Streaming et téléchargement.
8. Problèmes de probabilités conditionnelles.
9. QCM. Vrai-Faux.
10. L'indépendance.
11. Événements indépendants.
12. QCM. Vrai-Faux.
13. Exercices de synthèse.

Références

[Algomaths] Collection Algomaths, Maths enseignement commun, Tle Séries Techno, DELAGRAVE, 2020.

2, 3