

Applications géométriques des nombres complexes

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

Table des matières

1	Nombres complexes de module 1	2
1.1	L'ensemble $\mathbb{U}$	2
1.2	Racines n -ièmes de l'unité	2
2	Distances et angles orientés	3
3	Caractérisation des cercles et des médiatrices	5

Table des figures

1	Triangle rectangle isocèle direct	4
2	Triangle équilatéral	4

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1 Nombres complexes de module 1

1.1 L'ensemble $\mathbb{U}$

Définition : On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Par unicité de la forme exponentielle, on a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Exemples :

- $1; -1; i; -i; e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; etc. sont des éléments de $\mathbb{U}$.
- $1+i$ n'est pas un élément de $\mathbb{U}$.

Remarque : Graphiquement, l'ensemble $\mathbb{U}$ correspond au cercle trigonométrique.

Propriété : Soit $z, z' \in \mathbb{U}$.

Alors $zz' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Démonstration :

On a $|z| = 1$ et $|z'| = 1$.

$$|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$$

1.2 Racines n -ièmes de l'unité

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine n -ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Exemples : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ et $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.

Propriété : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \right\}$

Démonstration :

Comme $z^n = 1$, on a $|z^n| = 1 \iff |z|^n = 1$.

Comme $|z|$ est un nombre réel positif, on a donc $|z| = 1$.

On peut donc noter $z = e^{i\theta}$.

$$z^n = 1 \iff e^{in\theta} = e^0 \iff n\theta = 0 \pmod{2\pi} \iff n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

De plus, comme $z^n = 1$ est une équation polynomiale de degré n , elle admet au plus n solutions.

On a donc : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \right\}$

Exemples : $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$ et $\mathbb{U}_4 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{4}}; e^{\frac{4i\pi}{4}}; e^{\frac{6i\pi}{4}} \right\} = \{1; i; -1; -i\}$.

Remarque : Les racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercices : 21, 22 page 57 et 78, 79 page 64¹ [Magnard]

1. Racines n -ièmes de l'unité.

2 Distances et angles orientés

Théorème : Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

1. $AB = |z_B - z_A|$
2. Si $z_A \neq z_B$, $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
3. Si $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Démonstration :

On supposera que A et B ne sont pas confondus (c'est-à-dire $z_A \neq z_B$). Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. L'affixe de M est $z_B - z_A$.

Par définition de la forme trigonométrique des nombres complexes, on a : $\begin{cases} OM = |z_B - z_A| \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A) \end{cases}$.

Par suite : $AB = OM = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A)$.

De plus, si C et D ne sont pas confondus (c'est-à-dire $z_C \neq z_D$) :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) \\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \end{aligned}$$

Remarques : 1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ } [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ réel).

2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur).

Remarques : 1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ } [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ réel).

2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur).

Un cas particulier important : Si A, B et M sont trois points distincts d'affixes respectives a, b et z , alors $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)$. Or, $\frac{b-z}{a-z} = \frac{z-b}{z-a}$ donc :

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

Remarque : Cette relation est utilisée pour déterminer des ensembles de points.

Applications : Triangles particuliers

Dans la suite, A, B et C désignent trois points d'abscisses respectives z_A, z_B et z_C .

1. *Triangle rectangle rectangle isocèle direct* (voir figure 1)

$$ABC \text{ triangle rectangle isocèle direct en } A \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$$

2. *Triangle équilatéral* (voir figure 2)

$$ABC \text{ triangle équilatéral direct} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

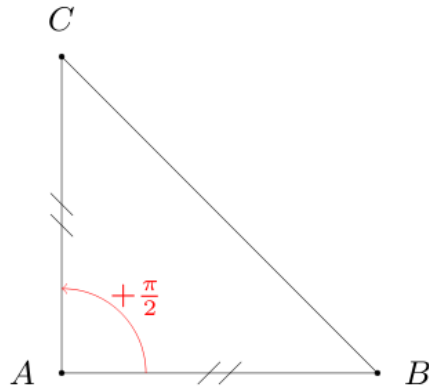


FIGURE 1 – Triangle rectangle isocèle direct

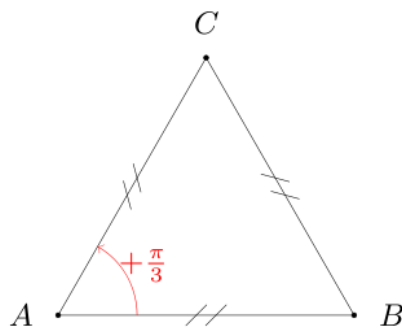


FIGURE 2 – Triangle équilatéral

Exercices : 23, 24 page 57; 81, 84, 85 page 64² – 27, 28 page 59; 53 page 63; 82, 83, 86, 87 page 64³ – 100; 102; 103, 104, 108 page 66⁴ – 106 page 66; 109 page 67 et 123 page 68⁵ [Magnard]

3 Caractérisation des cercles et des médiatrices

Propriété 1 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d’affixe ω et de rayon R .

Le point M d’affixe z est sur le **cercle** $\mathcal{C}$ si et seulement si $|z - \omega| = R$.

Démonstration :

$$M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = R \iff |z - \omega| = R$$

Remarque : $|z - \omega| = R$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z - \omega = Re^{i\theta}$, c’est-à-dire $z = \omega + Re^{i\theta}$.

Propriété 2 : Équation paramétrique complexe d’un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d’affixe ω et de rayon R .

Le point M d’affixe z est sur le **cercle** $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \omega + Re^{i\theta}$.

Propriété 3 : Soient A et B deux points d’affixes respectives a et b . On note Δ la **médiatrice** de $[AB]$.

Le point M d’affixe z est sur Δ si et seulement si $|z - a| = |z - b|$.

Démonstration :

$$M \in \Delta \iff M \text{ équisistant de } A \text{ et de } B \iff AM = BM \iff |z - a| = |z - b|$$

Exercices : 111, 113, 114, 116 page 67 et 121 page 68⁶ [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Expertes, MAGNARD, 2020

2, 5

2. Alignement, colinéarité.
 3. Configurations du plan.
 4. Nombres complexes et géométrie.
 5. Suites de nombres complexes.
 6. Ensembles de points.