# Applications du calcul matriciel

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2021/2022

---

## Table des matières



## Table des figures



---

en préliminaire au cours :
- Activité 1 (fp) : *Mouvements de population*
- Activité 2 (fp) : *Des poussins et des benjamins*

# 1 Suites de matrices colonnes

## 1.1 Suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$

**Propriété :** On considère A une matrice carrée d'ordre $p$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une matrice colonne $U_n$ à $p$ lignes telle que $U_{n+1} = AU_n$.
On a alors :

$$U_n = A^n U_0$$

**Remarques :**

1. Ce résultat se montre très simplement par récurrence.
2. Pour déterminer les coefficients de $U_n$ en fonction de $n$, il faut donc déterminer les coefficients de $A^n$. Il existe pour cela plusieurs méthodes :
   - On peut déterminer les coefficients de $A^n$ directement par récurrence (voir activité 1) ;
   - Si A est une matrice diagonale de la forme $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_p \end{pmatrix}$, alors $A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_p^n \end{pmatrix}$ ;
   - Si la matrice A peut se mettre sous la forme $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible, alors on peut montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ ;
   - Si la matrice A peut se mettre sous la forme $A = kI + T$ où I est la matrice identité et où la matrice T vérifie $T^2 = 0$, alors on peut montrer par récurrence que $A^n$ s'écrit en fonction de I et de T (voir activité 2).

**Exercice :** 100, 101, 102 page 188 et 125 page 193[1] [Magnard]

## 1.2 Suites de matrices de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$

On considère A une matrice carrée d'ordre $p$, la matrice colonne B à $p$ lignes et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une matrice colonne $U_n$ à $p$ lignes telle que $U_{n+1} = AU_n + B$.

**Plan d'étude :** (voir activité 2)

1. Déterminer la matrice colonne X telle que $X = AX + B$
2. On introduit la suite de matrices auxiliaire $V_n = U_n - X$ et on montre que $V_{n+1} = AV_n$

   **Démonstration :**

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - X \\ &= (AU_n + B) - (AX + B) \\ &= AU_n + B - AX - B = AU_n - AX = A(U_n - X) = AV_n \end{aligned}$$

3. On a donc, grâce au 1.1 : $V_n = A^n V_0$, avec $V_0 = U_0 - X$
4. Puis, comme $V_n = U_n - X$ :

$$U_n = V_n + X = A^n V_0 + X = A^n (U_0 - X) + X$$

1. Suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$.

**Remarque :** Pour déterminer la matrice colonne X, on peut soit résoudre un système d'équations, soit remarquer que si $\mathrm{I} - \mathrm{A}$ est inversible :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{AX} + \mathrm{B} \\ \mathrm{X} - \mathrm{AX} &= \mathrm{B} \\ (\mathrm{I} - \mathrm{A})\,\mathrm{X} &= \mathrm{B} \\ \mathrm{X} &= (\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{B} \end{aligned}$$

**Exercices :** 23, 24 page 178 ; 112 page 190 et 128 page 194 [2] [Magnard]

**Module :** TP 1 page 198 [3] [Magnard]

## 2 Transformations géométriques du plan

**Propriété :** Dans un repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, soit deux points $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

— $B$ est l'image de $A$ dans la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$$

— $B$ est l'image de $A$ dans la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

— L'image du vecteur $\vec{u}$dans la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$est appelée matrice de la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.

**Exemple :** Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le point $A\,\left(\sqrt{3}\,;7\right)$.

— L'image de $A$ dand la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est le point $B$ de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

— La matrice de la rotation de centre $O$ est d'angle $\frac{\pi}{4}$ est $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

— L'image de $A$ dans cette rotation est le point $C$ de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times 7 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}+7\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

**Exercices :** 25, 26 page 179 ; 102, 104, 105, 106 page 188 et 126 page 193 [4] [Magnard]

## 3 Graphes et matrices d'adjacences

**Activité :** Activité 3 page 165 [5] [Magnard]

2. Suites de matrices.
3. Modèle proie-prédateur.
4. Transformations géométriques du plan.
5. Découvrir les chemins et les graphes.

## 3.1 Notion de graphe

**Définition :**
- Un graphe est un schéma constitué de sommets, dont certains sont reliés par des arêtes.
- Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées (fléchées). On distingue alors le sommet origine de l'arête et son extrémité.
- Deux sommets reliés par au moins une arête sont dits adjacents.
- Une arête partant et arrivant au même sommet est appelée boucle.
- L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Dans un graphe, le degré de chaque sommet est le nombre d'arêtes dont il est l'une des extrémités.

**Remarque :** Attention ! Il ne faut pas oublier de compter *deux fois* les boucles, car le sommet est deux fois l'extrémité de cette arête.

**Exemple :** Dans le graphe de la figure 1, le degré du sommet A est 4.

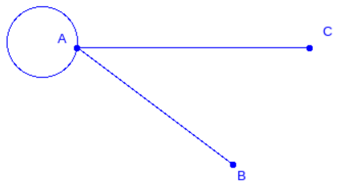


FIGURE 1 – Un graphe contenant une boucle

**Propriété :** La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au *double* du nombre total d'arêtes de ce graphe.
En particulier, c'est un nombre pair.

**Définition :** On ne considère que des graphes non orientés.
Un graphe simple est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.

**Exemples :** — Les graphes des figures 2 et 3 sont des graphes simples.



FIGURE 2 – Un exemple de graphe simple

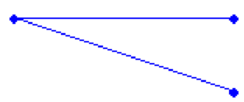

FIGURE 3 – Un autre exemple de graphe simple

— Le graphe de la figure 1 et de la figure 4 ne sont pas des graphes simples.

**Attention !** Dans le cas des graphes orientés, la définition d'un graphe simple est légèrement différente.
Ainsi, le graphe de le figure 5 est simple car les deux arêtes les deux sommets *ne sont pas les mêmes.*
Par contre, le graphe de la figure 6 n'est pas simple (deux fois la même arête) et celui de la figure 7 non plus (contient une boucle).

**Définition :** On ne considère que des graphes non orientés.
Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents.

**Remarque :** A l'ordre près des sommets, pour un ordre donné, il n'existe qu'un seul graphe non orienté complet.

**Exemples :**
1. Le graphe de la figure 2 est *le* graphe complet d'ordre 2.
2. Le graphe de la figure 3 n'est pas complet car il manque une arête.
3. Le graphe de la figure 4 n'est pas complet car il n'est pas simple.
4. Le graphe de la figure 8 est *le* graphe complet d'ordre 3.
5. Le graphe de la figure 9 est *le* graphe complet d'ordre 4.
6. Le graphe de la figure 10 est *le* graphe complet d'ordre 5.

**Attention !** Dans le cas des graphes orientés, la définition d'un graphe complet est légèrement différente. Ainsi, le graphe de le figure 5 est complet car il est *simple* et contient *toutes les arêtes possibles* entre les deux sommets.

**Propriété :** Dans le graphe non orienté complet d'ordre $n$, tous les sommets sont de degré $n-1$.

**Exercices :** 16, 17, 18, 20 page 175 ; 62, 64, 66, 67, 68 page 184 et 107 page 189[6] [Magnard]

## 3.2 Chaînes d'un graphe

**Définitions :**
- Dans un graphe non orienté, une chaîne est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.
- Dans un graphe orienté, une chaîne est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité de l'une est l'origine de l'autre.
- Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident, et qui est composée d'arêtes toutes distinctes (on peut par contre passer plusieurs fois par le même sommet).
- La **l**ongueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la constituent.

**Remarque :** Une chaîne est notée par la liste des sommets par laquelle elle passe, reliés par un segment ou par une flèche lorsque le graphe est orienté.

**Exemples :**
1. Quelques chaînes du graphe de la figure 11 :
   4 – 1 – 3 – 2 (longueur 3)
   1 – 2 – 3 (longueur 2)
   4 – 1 – 2 –3 – 2 (longueur 4)
   1 – 2 – 3 – 1 (cycle de longueur 3)
2. Une chaîne du graphe de la figure 12 : $2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4$.

**Exercices :** 15, 19 page 175[7] [Magnard]

## 3.3 Matrice d'adjacence

**Définition 1 :** La matrice d'ajacence associée à un graphe non orienté d'ordre $n$ est une matrice d'ordre $n$.
Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombres d'arêtes reliant le sommet $i$ du graphe au sommet $j$.

**Exemple :** La matrice associée au graphe de la figure 11 est :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La matrice associée à un graphe *non orienté* est toujours une matrice symétrique.

6. Généralités sur les graphes.
7. Chaînes d'un graphe.

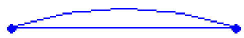

FIGURE 4 – Un exemple de graphe non simple

FIGURE 5 – Un graphe orienté simple

FIGURE 6 – Un graphe orienté non simple

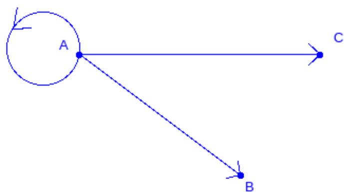


FIGURE 7 – Graphe orienté contenant une boucle

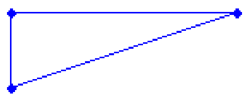

FIGURE 8 – Le graphe complet d'ordre 3

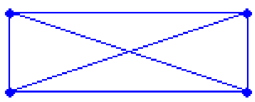

FIGURE 9 – Le graphe complet d'ordre 4

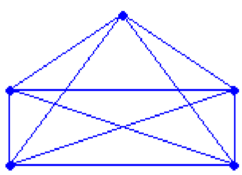

FIGURE 10 – Le graphe complet d'ordre 5

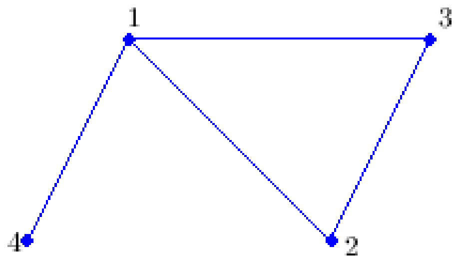


FIGURE 11 – Chaînes d'un graphe non orienté

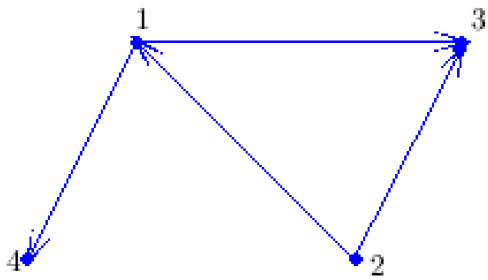


FIGURE 12 – Chaînes d'un graphe orienté

**Définition 2 :** La matrice d'adjacence associée à un graphe orienté d'ordre $n$ est une matrice d'ordre $n$.
Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombres d'arêtes d'origine le sommet $i$ du graphe et d'extrémité sommet $j$.

**Exemple :** La matrice associée au graphe de la figure 12 est :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarques :** La matrice associée à un graphe *orienté* n'est pas nécessairement une matrice symétrique.

**Propriété (admise) :** Soit A la matrice associée à un graphe G et $p$ un nombre entier naturel.
Le coefficient de $\mathrm{A}^p$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombre de chaînes de longueur $p$ reliants le sommet $i$ au sommet $j$.

**Exercices :** 32 page 181 ; 70, 71, 72 page 185 [8] – 21, 22 page 177 ; 33 page 181 ; 74, 76, 78 page 185 ; 108, 110 page 189 ; 113, 114 page 190 et 124 page 193 [9] [Magnard]

**Module :** Exercice 127 page 194 [10] [Magnard]

## Références

[Magnard] Maths Tle Expertes, MAGNARD, 2020

2, 3, 5, 7

8. Matrice d'adjacence.
9. Nombre de chaînes d'un graphe.
10. Les sept ponts de Königsberg.