Suites numériques
Généralités

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

Table des figures

Liste des algorithmes

Questions flash : Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 page 43[1] [Magnard]
Activités : Activités 1[2] et 2[3] page 44 [Magnard]

1 Notion de suite numérique

1.1 Définition

Définition : Une suite numérique est une liste indexée de nombres.
Elle a un premier terme, un deuxième terme, etc.

Exemples :
1. La suite des multiples de 7 : 0, 7, 14, ...
2. La suite des nombres entiers impairs : 1,3, 5, 7, ...
3. La suite définie par $u_n = n^2 + 1$.

Notations :
— On utilise généralement les lettres u, v, w, ... pour caractériser une suite.
— u_n est appelé terme d'indice n (ou de rang n) de la suite.
— La suite dans sa globalité est notée u ou (u_n).

Remarque : Dans beaucoup de cas, on commencera l'indexation à l'indice zéro. Dans ce cas :
u_0 est le premier terme ;
u_1 est le deuxième terme ;
u_2 est le troisième terme ; etc.
Il ne faut donc pas confondre le terme d'indice n de la suite et son $n^{\text{ième}}$ terme.

1.2 Modes de génération d'une suite

Cas 1 : A l'aide d'une formule explicite
— Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -n^2 + n - 2$.
On a : $u_0 = -0^2 + 0 - 2 = 2$; $u_1 = -1^2 + 1 - 2 = -2$; $u_2 = -2^2 + 2 - 2 = -4$; $u_3 = -3^2 + 3 - 2 = -8$; etc.
— la fonction Python de l'algorithme 1 calcule le terme de rang n de la suite (u_n) :

Algorithme 1 Suite définie par une formule explicite
```
def u(n) :
    return -n^2 + n - 2
```

Remarques :
1. La suite (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = -x^2 + x - 2$.
2. On peut utiliser la calculatrice pour calculer les termes consécutifs d'une suite définie par une formule explicite (voir exercice résolu 1 page 56 [Magnard])

Exercices : 1, 2 page 56 et 35, 36, 37, 38 page 64[4] – 39 page 64 et 100 page 69[5] – 90, 92 page 68[6] – 97, 98 page 68 et 102 page 69[7] [Magnard]

Cas 2 : Suites définies par récurrence
— Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

On a :
$u_1 = \frac{u_0+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$; $u_2 = \frac{u_1+3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$; $u_3 = \frac{u_2+3}{2} = \frac{\frac{7}{2}+3}{2} = \frac{13}{4}$; etc.
la fonction Python de l'algorithme 2 calcule le terme de rang n de la suite (u_n) :

1. Révisions.
2. Découvrir la notion de suite avec le triangle de Sierpinski
3. Découvrir la notion de suite définie par récurrence.
4. Calcul de termes, suites définies par une formule explicite.
5. Modéliser à l'aide d'une suite.
6. Utilisation de la calculatrice ou du tableur.
7. Algorithmique et python.

Algorithme 2 Suite définie par récurrence

```
def u(n) :
    u = 5
    for i in range (1, n+1) :
        u = (u+3)/2
    return u
```

Remarques :

1. On a donc $u_{n+1} = g(u_n)$ où g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$.
2. On peut utiliser la calculatrice pour calculer les termes consécutifs d'une suite définie par récurrence (voir exercice résolu 2 page 57 [Magnard])

Exercices : 3, 4 page 57 ; 41, 42 page 64 et 88, 89 page 68 [8] – 5, 6 page 58 ; 43 page 64 ; 44 page 65 et 101 page 69 [9] – 93, 94 page 68 [10] – 95, 96, 99 page 68 et 103 page 69 [11] [Magnard]

Module : TP 2 page 76 [12] [Magnard]

1.3 Représentation graphique d'une suite

Représentation 1 : Sur une droite graduée

On place sur une droite graduée les réels d'abscises u_0, u_1, u_2, etc.

Exemple : $u_n = 2n - 1$ (voir figure 1)

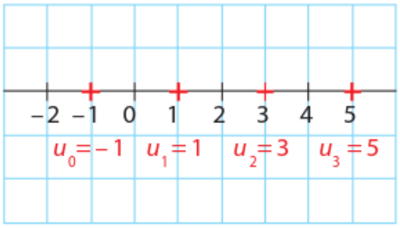

Figure 1 – Repésentation graphique sur une droite graduée

Représentation 2 : Cas d'une suite définie par une formule explicite

Comme $u_n = f(n)$, la représentation graphique de la suite (u_n) correspond aux points de la courbe représentative de f ayant une abscisse entière. *On ne joint pas ces points.*

Exemple : $u_n = \sqrt{n+1}$

On trace la courbe représentative de la fonction $f : x \to \sqrt{x+1}$ et on ne prend que les points dont l'abscisse est entière (voir figure 2).

Représentation 3 : Cas d'une suite définie par récurrence

La suite est donc de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

On suit le protocole de construction suivant :

1. On trace la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses
3. Grâce à la courbe représentative de f, on place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées
4. Grâce à la droite d'équation $y = x$, on place u_1 sur l'axe des abscisses
5. On réitère les points 3. et 4. pour placer successivement u_2, u_3, etc.

Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = 9$

On applique le protocole de construction à partir de la fonction $f : x \to \sqrt{x}$ (voir figure 3).

8. Calcul de termes, suites définies par récurrence.
9. Modéliser à l'aide d'une suite.
10. Utilisation de la calculatrice ou du tableur.
11. Algorithmique et python.
12. Suite de Syracuse

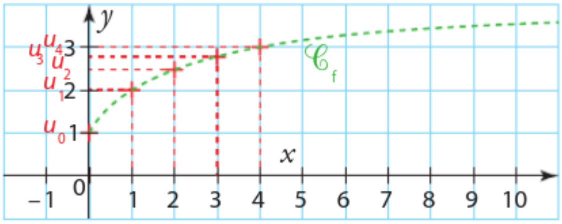

FIGURE 2 – Représentation graphique d'une suite définie par une formule explicite

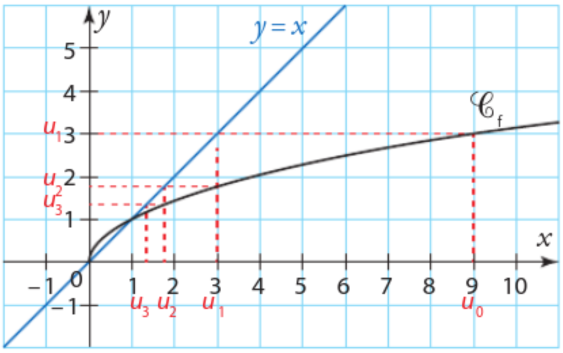

FIGURE 3 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Exercices : 7, 8 page 59 ; 45, 46, 47, 49 page 65 et 131 page 72 [13] [Magnard]

2 Sens de variation d'une suite

Activité : Activité 6 page 46 [14] [Magnard]

2.1 Définition

Définition :
— Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
— Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Remarques :

1. On peut aussi définir une suite strictement croissante, strictement décroissante ou constante.
2. Il est possible de n'étudier les variations d'une suite qu'à partir d'un rang k donné.

2.2 Étude du sens de variation d'une suite

Propriété 1 : Pour étudier les variations de la suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:
— Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (u_n) est croissante.
— Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$.
— Si la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
— Si la fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarques : 1. La réciproque de cette propriété est fausse. Il suffit par exemple de considérer la suite $u_n = \sin(2\pi n)$ (voir figure 4).

13. Représentation graphique d'une suite
14. Étudier les variations d'une suite

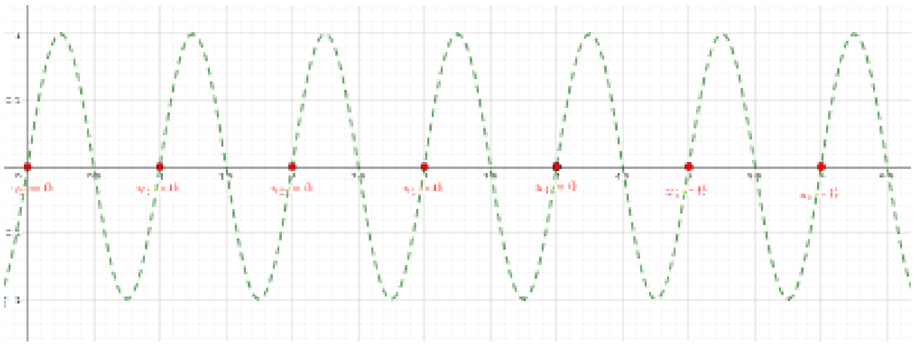

FIGURE 4 – Cas de la suite $u_n = \sin(2\pi n)$

2. Attention, ce théorème ne s'applique pas pour des suites définies par récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.
- Si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors (u_n) est croissante.
- Si pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors (u_n) est décroissante.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -3n + 2$.
On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = -3x + 2$.
La fonction f est affine, de coefficient directeur $-3 < 0$, elle est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n^2 + 2n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 + 2(n+1) - \left(n^2 + 2n\right) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

De plus, comme $n \geq 0$,on a $2n + 3 > 0$
Donc, pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante.

3. Soit (w_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{4}{n+1}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{4}{n+2} - \frac{4}{n+1} \\ &= \frac{4(n+1) - 4(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{4n + 4 - 4n - 8}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-4}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

De plus, comme $n \geq 0$,on a $n + 1 > 0$ et $n + 2 > 0$
Donc, pour tout n, $w_{n+1} - w_n < 0$ donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

4. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = \dfrac{3^n}{4^{n+2}}$.
(t_n) est à termes strictement positifs.

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+3}}}{\frac{3^n}{4^{n+2}}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+3}} \times \frac{4^{n+2}}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{4^{n+2}}{4^{n+3}} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Pour tout n, $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} < 1$ donc la suite (t_n) est strictement décroissante.

5. Soit (z_n) la suite définie par $z_n = (-1)^n$.
   On a $z_0 = 1$; $z_1 = -1$; $z_2 = 1$; ... et, plus généralement, $z_{2n} = 1$ et $z_{2n+1} = -1$.
   Donc la suite (z_n) n'est pas monotone.

Remarques : 1. Dans l'exemple 1, on aurait pu aussi calculer $u_{n+1} - u_n$.

2. Dans l'exemple 2, on aurait pu aussi utiliser les variations de la fonction $f : x \to x^2 + 2x$

Exercices : 17, 18 page 63 ; 78, 79, 80 page 67 ; 116, 117 page 70 et 118 page 71 [15] [Magnard]

3 Une approche de la notion de limite

Activités : Activités 8 page 47 [16] [Magnard]

3.1 Un exemple de limite finie

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$).
Les premiers termes de (u_n) sont : $1\,;\ \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{1}{4}\,;\ \ldots\,;\ \dfrac{1}{10}\,;\ \ldots\,;\ \dfrac{1}{100}\,;\ \ldots$

Les termes finissent par s'accumuler autour de zéro (voir figure 5).

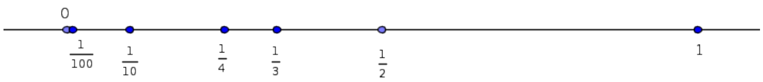

FIGURE 5 – Suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$

Plus précisément, on peut rendre les termes u_n aussi proche de zéro que l'on veut, dès que n est suffisamment grand.
On dit que la suite (u_n) a pour limite zéro quand n tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Remarque : De même, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$.

3.2 Un exemple de limite infinie

Soit (v_n) la suite définit par $v_n = n^2$.
Les premiers termes de (u_n) sont : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; ... ; 100 ; ... ; 10 000 ; ...

On peut rendre les valeurs de v_n aussi grandes que l'on veut en prenant n suffisamment grand (voir figure 6).

On dit que la suite (v_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Par un raisonnement analogue, la suite (w_n) définie par $w_n = -n - 1$ a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (voir figure 7).
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$$

15. Variations de suites.
16. Découvrir la notion de limite

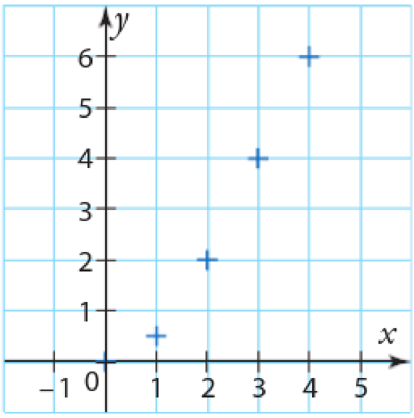

Figure 6 – Cas de $v_n = n^2$

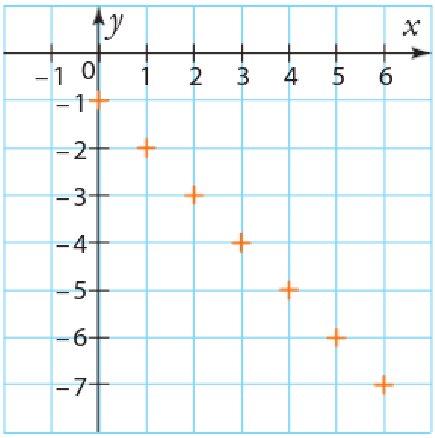

Figure 7 – Cas de $w_n = -n - 1$

3.3 Un exemple de dispersion

Soit $t_n = (-1)^n$

-1 et 1 sont les deux seules valeurs possibles pour la suite. La limite éventuelle de la suite ne pourrait donc être que -1 ou 1.
Or, aucun des intervalles $]0\,;\,2[$ et $]-2\,;\,0[$ ne contiennent tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (les termes d'indice pair sont dans $]0\,;\,2[$ et ceux d'indice impair dans $]-2\,;\,0[$.
Cette suite n'a donc pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$ (voir figure 8).

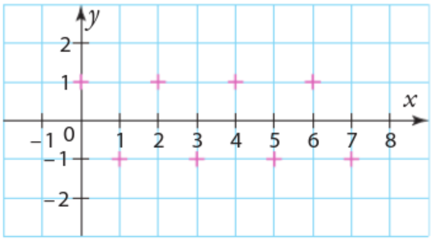

FIGURE 8 – Cas de $t_n = (-1)^n$

Exercices : 19, 20 page 63 ; 83, 84 page 67 et 119, 120, 121 page 71 [17] – 122, 123, 124, 125, 125 page 71 [18] – 130 page 72 [19] [Magnard]

Module : TP 3 page 77 [20] [Magnard]

Références

[Magnard] MATHS 1RE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ, PROGRAMME 2019,MAGNARD

2, 3, 4, 6, 8

17. Conjecturer des limites
18. Recherche de seuil.
19. Exercice-bilan
20. Les lapins de FIBONACCI