Second degré

Équations et inéquations

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

1	Fonction polynôme de degré 2	2
1.1	Définition	2
1.2	Forme canonique	2
1.3	Sens de variations et représentation graphique	3
2	Équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$	3
2.1	Discriminant	3
2.2	Factorisation d'un polynôme de degré 2	6
2.3	Somme et produit de racines	6
3	Signe du trinôme	7
3.1	Si $\Delta > 0$	7
3.2	Si $\Delta = 0$	8
3.3	Si $\Delta < 0$	8
3.4	En résumé...	8

Liste des tableaux

1	Variations d'un trinôme du second degré	4
2	Résultats essentiels sur les polynômes de degré 2.	9

Liste des algorithmes

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Questions Flash : Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 page 81 [Magnard]

Activité : Activité 3 page 83¹ [Magnard]

Remarque : Appliquer ensuite la méthode de la partie B de l'activité aux équations suivantes :

- $x^2 + 10x = 39$
- $2x^2 - 10x - 48 = 0$ (on commencera par factoriser par 2)
- $x^2 + x + 2 = 0$

1 Fonction polynôme de degré 2

1.1 Définition

Définition : Un **polynôme de degré 2** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Remarque : Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelé **trinôme du second degré**.

Exemples : Voici quelques trinômes du second degré

1. $x \rightarrow 3x^2 - x + 1$
2. $x \rightarrow -x^2 + \pi x - \sqrt{2}$
3. $x \rightarrow (3x - 2)(1 - x)$
4. $x \rightarrow -3x^2$

Exercices : 27, 28, 29, 30 page 94² – 75 page 97³ [Magnard]

1.2 Forme canonique

Propriété : Tout **polynôme de degré 2** peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette forme est appelé **forme canonique**.

Méthode de détermination de la forme canonique : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme de degré 2.

1. On commence par mettre a en facteur (c'est possible, car $a \neq 0$).

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

2. On remarque que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début de développement d'un carré :

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $(x + \frac{b}{2a})^2$:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \\ &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

1. Résoudre des équations du second degré.
2. Fonctions polynômes de degré 2
3. Détermination d'un polynôme de degré 2

3. On utilise cette forme pour terminer la transformation de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \right) \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Remarques :

1. Il est inutile de connaître cette formule par cœur. Il faut par contre se souvenir de la méthode, pour pouvoir, sur des exemples, trouver la forme canonique.
2. Pour un polynôme de degré 2, il existe donc une forme réduite (celle de la définition), une forme canonique et (éventuellement) une forme factorisée. Suivant le problème posé, il faudra donc choisir entre ces formes.

Exercices : 1 page 90 et 34, 35 page 94⁴ – 2 page 90 et 68, 69 page 97⁵ [Magnard]

1.3 Sens de variations et représentation graphique

Le tableau 1 donne le sens de variations des fonctions polynômes de degré 2.

On note $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Remarques : 1. La courbe représentative d'un trinôme du second degré est appelée **parabole**.

Elle admet comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

Si $a > 0$, elle est tournée vers le haut.

Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.

2. Le **sommet** de la courbe est le point $S(\alpha; \beta)$.

Exercices : 3, 4 page 90 et 37, 38, 39 page 95⁶ – 36, 40 page page 95 et 70, 71, 72 page 97⁷ – 76 page 97⁸ [Magnard]

2 Équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

Question flash : 44, 45, 46 page 95⁹ [Magnard]

2.1 Discriminant

Pour avoir une méthode générale de résolution des équations du second degré, on va utiliser la forme canonique :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

4. Détermination de forme canonique
 5. Utilisation de la forme canonique
 6. Sens de variations des fonctions polynômes de degré 2.
 7. Propriétés de la parabole.
 8. Utilisation des variations d'un polynôme de degré 2
 9. Factorisation et résolution d'équations

	$a > 0$	$a < 0$																
Tableau de variations de f	<table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">α</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> $\searrow$ β $\nearrow$ </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$f(x)$	$\searrow$ β $\nearrow$			<table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">α</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="3" style="text-align: center;"> $\nearrow$ β $\searrow$ </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$f(x)$	$\nearrow$ β $\searrow$		
x	$-\infty$	α	$+\infty$															
$f(x)$	$\searrow$ β $\nearrow$																	
x	$-\infty$	α	$+\infty$															
$f(x)$	$\nearrow$ β $\searrow$																	
Courbe représentative de f																		

TABLE 1 – Variations d'un trinôme du second degré

Définition : On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Δ est appelé **discriminant** du trinôme.

La forme canonique peut alors s'écrire :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

— Si $\Delta > 0$:

On a alors $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$, on peut donc écrire : $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$ d'où :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \end{aligned}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 &\quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} &\quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} &\quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a alors deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$:

La forme canonique devient :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a alors une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$:

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0 \quad (\text{car } a \neq 0) \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Or, comme $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$.

Un carré étant toujours positif : $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$.

Cette équation est donc impossible.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a alors aucune solution.

Résumé : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de cette équation.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet **deux solutions** distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet **une solution** unique :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet **aucune solution**.

Exemples : 1. $-6x^2 + x + 1 = 0$

On a : $a = -6$; $b = 1$ et $c = 1$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 1 + 24 = 25.$$

Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times (-6)} = \frac{-1 - 5}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times (-6)} = \frac{-1 + 5}{-12} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$$

2. $5x^2 + 6x + 2 = 0$

On a $a = 5$; $b = 6$ et $c = 2$.

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = 36 - 40 = -4.$$

Comme $\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solution.

$$S = \emptyset$$

3. $x^2 - 14x + 49 = 0$

On a $a = 1$; $b = -14$ et $c = 49$.

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 49 = 196 - 196 = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une seule solution : $x_0 = -\frac{-14}{2 \times 1} = 7$

$$S = \{7\}$$

Remarque : On peut trouver plus rapidement le résultat du dernier exemple en remarquant que :

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

Il n'est donc pas toujours judicieux d'utiliser le discriminant, notamment dans les cas où il est possible de factoriser.

Exercices : 47, 48, 49 page 95¹⁰ – 5 page 91; 50, 51 page 96¹¹ – 77, 78 page 97 et 87 page 98¹² – 81, 84, 85, 86, 93, 94 page 98 et 97, 99, 100 page 99 et 109, 110, 111 page 101¹³ [Magnard]

2.2 Factorisation d'un polynôme de degré 2

On peut déduire de l'étude menée au 2.1 la propriété suivante :

Propriété : Factorisation d'un polynôme de degré 2Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.— Si $\Delta > 0$, f se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

 x_1 et x_2 sont appelés **racines** du polynôme f .— Si $\Delta = 0$, f se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

 x_0 est appelé **racine double** du polynôme f .— Si $\Delta < 0$, f ne se factorise pas.**Remarque :** Le cas où $\Delta < 0$ est admis.**Exercices :** 6 page 91 et 52 page 96¹⁴ – 8 page 92; 53, 54, 55, 56 page 96 et 73, 74 page 97¹⁵ [Magnard]

2.3 Somme et produit de racines

On se place dans le cas où $\Delta \geq 0$, c'est à dire que le trinôme admet deux racines (éventuellement égales si $\Delta = 0$) $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

10. Propriétés du discriminant.

11. Résolution d'équations de degré 2

12. Équations se ramenant au second degré.

13. Résolution de problèmes.

14. Notion de racines d'un polynôme

15. Factorisation d'un polynôme de degré 2.

$$\begin{aligned}
&= \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\
x_1 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\
&= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Propriété : Somme et produit de racines

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré ayant deux racines x_1 et x_2 . Alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque : Cette propriété permet de retrouver les coefficients du trinôme f si l'on connaît ses deux racines, ou de trouver une des deux racines si l'autre est connue.

Exercices : 7, 9 page 92 et 57, 58 page 96¹⁶ [Magnard]

3 Signe du trinôme

Activité : Activité 4 page 83¹⁷ [Magnard]

Questions flash : 59, 61 page 96¹⁸ [Magnard]

3.1 Si $\Delta > 0$

On a alors deux racines distinctes x_1 et x_2 . On a vu au 2.2 que l'on peut alors factoriser f :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Pour simplifier, on supposera que $x_1 < x_2$. On obtient le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$		-	0	+
$x - x_2$		-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	-
$a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $(-a)$

Pour résumer :

Propriété 1 : Si $\Delta > 0$, f est du **signe de a à l'extérieur des racines** et **du signe opposé à a entre les racines**.

16. Somme et produit de racines.
17. Étudier le signe d'un trinôme.
18. Résolutions d'inéquations et tableaux de signes.

3.2 Si $\Delta = 0$

On a alors une seule racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$. On a vu au 2.2 que l'on peut alors factoriser f :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Comme un carré est toujours positif et que f s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$a(x - x_0)^2$	Signe de a	0	Signe de a

Pour résumer :

Propriété 2 : Si $\Delta = 0$, f est toujours du signe de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

3.3 Si $\Delta < 0$

Il n'y a pas de racine et on a vu au 2.1 que :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Or :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ (c'est un carré) ;
- comme $\Delta < 0$, $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Par suite, l'expression entre crochets est toujours *strictement* positive. f est donc toujours *strictement* du signe de a .

Pour résumer :

Propriété 3 : Si $\Delta < 0$, f est toujours *strictement* du signe de a .

3.4 En résumé...

Les résultats essentiels concernant l'étude des trinômes du second degré sont résumés dans le tableau 2.

Exercices : 11, 12, 14 page 93 et 60, 62, 63 page 96¹⁹ – 82, 83 page 98²⁰ – 95 page 99 et 112 page 101²¹
– 98 page 99²² – 96 page 99²³ – 107, 108 page 101²⁴ [Magnard]

Références

[Magnard] MATHS 1RE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ, PROGRAMME 2019, MAGNARD

2, 3, 6, 7, 8

19. Tableaux de signes, résolutions d'inéquations.
20. Inéquations et signes se ramenant au second degré
21. Problèmes économiques.
22. Problèmes géométriques.
23. Problème de trajectoire
24. Exercices de synthèse

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	pas de racine
Factorisation	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de factorisation
Signe	du signe de a à l'extérieur des racines du signe opposé à a entre les racines	toujours du signe de a	toujours <i>strictement</i> du signe de a
Courbe représentative si $a > 0$			
Courbe représentative si $a < 0$			

TABLE 2 – Résultats essentiels sur les polynômes de degré 2.