2 Équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

2.1 Discriminant

Pour avoir une méthode générale de résolution des équations du second degré, n va utiliser la forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Définition : On note $\Delta = b^2 - 4ac$.
Δ est appelé discriminant du trinôme.
La forme canonique peut alors s'écrire :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

— Si $\Delta > 0$:
On a alors $\Delta = (....)^2$, on peut donc écrire : $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{.....}{.....}\right)^2$ d'où :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} + ...\right)\left(x + \frac{b}{2a} - ....\right) \end{aligned}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$
$$x = ... \qquad\qquad x = ...$$
$$x = \frac{................}{2a} \qquad\qquad x = \frac{................}{2a}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a alors deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$:
La forme canonique devient :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a alors une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$:

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= 0 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0 \qquad (\text{car } a \neq 0) \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Or, comme $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2}$.......0.

Un carré étant toujours positif : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ....0.

Cette équation est donc ....

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a alors aucune solution.

Résumé : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de cette équation.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution.

Exemples : 1. $-6x^2 + x + 1 = 0$

On a : $a =$ .... ; $b =$ .... et $c =$ ......

$\Delta =$ ....

2. $5x^2 + 6x + 2 = 0$

3. $x^2 - 14x + 49 = 0$

Remarque : On peut trouver plus rapidement le résultat du dernier exemple en remarquant que :

$$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$$

Il n'est donc pas toujours judicieux d'utiliser le discriminant, notamment dans les cas où il est possible de factoriser.