

Dérivation

Tangente à une courbe

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

1	Tangente et nombre dérivé	3
1.1	Taux de variation d'une fonction	3
1.2	Notion de tangente à une courbe	4
1.3	Nombre dérivé – Exemple	4
1.4	Équation de la tangente à une courbe	5
2	Fonction dérivée	5
2.1	Notion de fonction dérivée	5
2.2	Dérivées des fonctions usuelles	6
2.2.1	Fonction affine	6
2.2.2	Fonction carrée	6
2.2.3	Fonction inverse	6
2.2.4	Autres fonctions usuelles	7
3	Opérations sur les fonctions dérivables	8
3.1	Somme de deux fonctions dérivables	8
3.2	Multiplication par une constante	8
3.3	Produit de fonctions dérivables	9
3.4	En résumé...	9

Table des figures

1	Sécante à une courbe	3
2	Tangente à une courbe	4
3	La fonction racine carrée	7
4	Fonction valeur absolue	8

Liste des tableaux

1	Dérivées des fonctions usuelles	7
2	Opérations sur les fonctions dérivables	9

En préliminaire :

Questions Flash : 1, 2, 3, 4, 5 page 111¹ [Magnard]

Activités : Activités 1² et 2³ page 112 [Magnard]

1 Tangente et nombre dérivé

Dans toute la suite, on considère une fonction f définie sur un intervalle I . On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; I; J)$.

1.1 Taux de variation d'une fonction

Définition : Soit $a, b \in I$.

On appelle **taux de variation de f entre a et b** le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On peut le noter $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a; b)$.

Remarque : On note A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b . On a donc $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

Le taux de variation de f entre a et b correspond au **coefficient directeur m de la droite (AB) , sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et en B** . (voir figure 1)

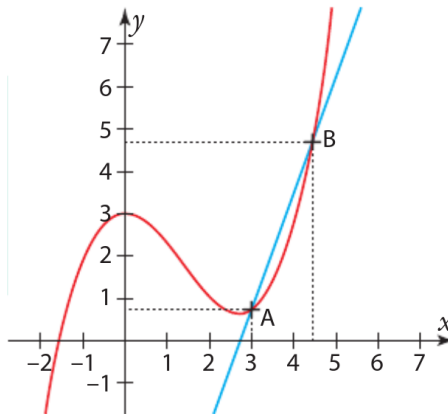


FIGURE 1 – Sécante à une courbe

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 32x^3 - 90x^2 + 100x$.

On a $f(0) = 0$ et $f(2) = 32 \times 2^3 - 90 \times 2^2 + 100 \times 2 = 96$

Le taux de variations de f entre 0 et 2 est :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(0; 2) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{96 - 0}{2} = 48$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite (AB) , avec $A(0; 0)$ et $B(2; 96)$.

Questions flash : Exercices 16, 17 page 128⁴ [Magnard]

Exercices : 25, 26, 27, 29 page 129 et 56, 59 page 131⁵ – 58 page 131⁶ – 30, 31 page 128; 32 page 129 et 57 page 131⁷ [Magnard]

1. Rappels sur les fonctions.
2. Calculer un taux de variation.
3. Calculer un accroissement moyen, une vitesse moyenne.
4. Taux de variations et coefficient directeur de sécante.
5. Taux de variations.
6. Utilisation du taux de variation.
7. Taux de variation entre a et $a + h$.

1.2 Notion de tangente à une courbe

Soit a de l'intervalle I et h un réel.

On note $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.

La sécante (AM) à la courbe $\mathcal{C}_f$ a comme coefficient directeur :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a; a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On appelle **tangente** T à la courbe représentant f en A (si elle existe), la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A en restant sur la courbe (voir figure 2).

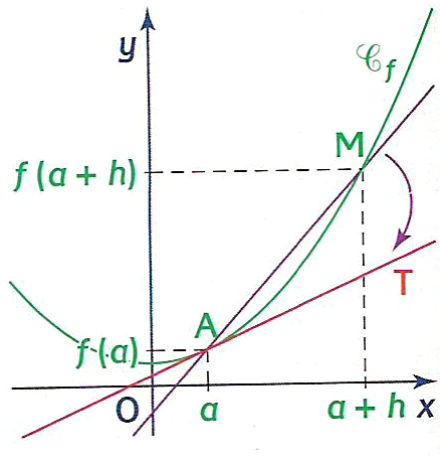


FIGURE 2 – Tangente à une courbe

Ce qui revient à dire que h tend vers zéro. Le coefficient directeur m de la tangente (s'il existe) sera alors la limite quand h tend vers zéro du taux de variation, ce qui est noté :

$$m_{\text{tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exercices : Reprendre les résultats de l'exercice 31 page 128 et en déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3, puis une équation de cette tangente.

Faire de même avec l'exercice 32 page 219 et la tangente à la courbe au point d'abscisse -2 .

1.3 Nombre dérivé – Exemple

Définition : Si le taux de variation entre a et $a+h$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a; a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tend vers un nombre fini lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est **dérivable en a** .

Ce nombre est alors appelé **nombre dérivé de f en a** . On le note $f'(a)$.

On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : Le **nombre dérivé** de f en a est donc le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

Montrons que f est dérivable en $a = 1$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3(1+h)^2 + 4(1+h) - 5 - 2}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3(1+2h+h^2) + 4 + 4h - 7}{h} \\
&= \frac{3 + 6h + 3h^2 + 4 + 4h - 7}{h} \\
&= \frac{10h + 3h^2}{h} = 10 + 3h
\end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 10$.

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 10$.

Question flash : 18, 19, 20 page 128⁸ [Magnard]

Exercices : 6, 7 page 125 ; 42, 43 page 129 ; 65 page 131 et 66 page 132⁹ – 1, 2, 3 page 124 et 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41 page 129 et 62 page 131¹⁰ – 60 page 131¹¹ – 63 page 131¹² – 64 page 131¹³ [Magnard]

1.4 Équation de la tangente à une courbe

On reprend la figure 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.

La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite :

— de **coefficient directeur** $m = f'(a)$;

— **passant par** $A(a; f(a))$.

L'équation de T est de la forme : $y = f'(a) \cdot x + p$.

De plus, la tangente passe par le point A donc : $f(a) = f'(a) \times a + p$. On a donc $p = f(a) - f'(a) \times a$

L'équation de T est donc :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \times a \\
&= f'(a) \cdot x - f'(a) \cdot a + f(a) \\
&= f'(a)(x - a) + f(a)
\end{aligned}$$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercices : 4, 5 page 124 ; 44 page 130 ; 67 page 132 et 83 page 133¹⁴ [Magnard]

2 Fonction dérivée

2.1 Notion de fonction dérivée

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3$ et soit a un réel.

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-(a+h)^2 + 3 - (-a^2 + 3)}{h} \\
&= \frac{-(a^2 + 2ah + h^2) + 3 + a^2 - 3}{h} \\
&= \frac{-a^2 - 2ah - h^2 + a^2}{h} \\
&= \frac{-2ah - h^2}{h} = -2a - h
\end{aligned}$$

8. Nombre dérivé et tangentes.

9. Détermination graphique du nombre dérivé.

10. Calcul de nombre dérivé.

11. Algorithmique.

12. Utilisation de GEOGEBRA.

13. Tracé d'une courbe connaissant des images et des nombres dérivés.

14. Équations de tangentes.

Par suite, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -2a$.

Donc f est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = -2a$.

Ce résultat étant valable pour *tout* a , on dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on appelle *fonction dérivée* la fonction $f' : x \rightarrow -2x$.

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I , on dit qu'elle est **dérivable sur l'intervalle I** .

Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I la fonction qui, à tout x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f' .

Remarque : Dire qu'une fonction est dérivable signifie qu'il existe des tangentes à tout point de la courbe la représentant. Par contre, la fonction dérivée n'a plus de lien avec la tangente en un point.

2.2 Dérivées des fonctions usuelles

2.2.1 Fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.

En tout point $a \in \mathbb{R}$, elle sa courbe représentative est sa propre tangente. Elle est donc dérivable en a et $f'(a) = m$.

Toute fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = m$.

Cas particuliers : — *Fonction constante* (de la forme $f(x) = k$)

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur dérivée est $f'(x) = 0$.

— *Fonction identité* ($f(x) = x$)

Elles est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 1$.

2.2.2 Fonction carrée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$.

Donc f est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$.

La fonction carrée $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

2.2.3 Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{-h}{a(a+h)} = -\frac{1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a^2}$.

Donc f est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$ et sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2.2.4 Autres fonctions usuelles

On démontre, par un type de raisonnement analogue aux précédents, des résultats équivalents pour d'autres fonctions usuelles.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 1.

fonction f	dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier > 0)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier > 0)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles

Exemples :

1. La fonction $f : x \rightarrow 3 - 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2$
2. La fonction $g : x \rightarrow x^6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 6x^5$
3. La fonction $h : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$ et $h'(x) = -\frac{2}{x^3}$

Remarques :

1. La fonction **racine carrée** n'est pas dérivable en zéro (voir figure 3).

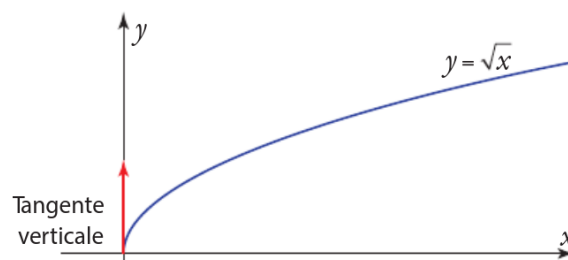


FIGURE 3 – La fonction racine carrée

Elle admet au point d'abscisse zéro une **tangente verticale**, qui n'a donc pas de coefficient directeur.

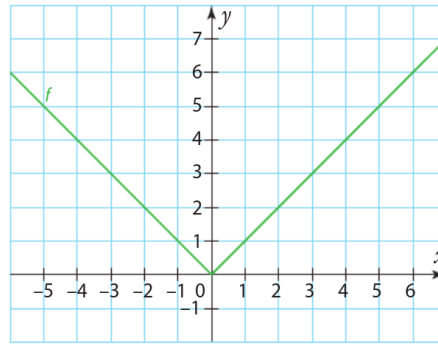


FIGURE 4 – Fonction valeur absolue

2. La fonction **valeur absolue** $f : x \rightarrow |x|$ (voir figure 4) :

- La courbe représentant f n'admet pas de tangente au point d'abscisse zéro donc **la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro** ;
- Si $x > 0$, on a $f(x) = |x| = x$ donc f **est dérivable sur $]0; +\infty[$** et $f'(x) = 1$;
- Si $x < 0$, on a $f(x) = |x| = -x$ donc f **est dérivable sur $]0; +\infty[$** et $f'(x) = -1$.

Exercices : 45 page 130¹⁵ – 68 page 132¹⁶ – 87 page 133¹⁷ [Magnard]

3 Opérations sur les fonctions dérivables

3.1 Somme de deux fonctions dérivables

Activité : Activité 4 page 114¹⁸ [Magnard]

Propriété 1 : Soit u et v **deux fonctions dérivables** sur un intervalle I .
 Alors la fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' + v'$.
 On note : $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

$$f = u + v \text{ avec } u(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \frac{1}{x}.$$

u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Par suite f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Exercice : Exercice 46 page 130¹⁹ [Magnard]

3.2 Multiplication par une constante

Propriété 2 : Soit u **une fonction dérivable** sur un intervalle I et k un **nombre réel**.
 Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est ku' .
 On note : $(ku)' = ku'$.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -3\sqrt{x}$.

$$\text{Alors } f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ et } f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

15. Fonctions dérivées.

16. Tangentes ; Programme PYTHON.

17. Approximation affine.

18. Dériver une somme de fonctions

19. Dérivée d'une somme.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^3 - x^2 + x\sqrt{2} - 1$.

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 1 \times \sqrt{2} + 0 = 9x^2 - 2x + \sqrt{2}$.

Remarque : Il résulte des propriétés 1 et 2 que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercices : 47 page 130 et 69 page 132²⁰ – 48 page 130 et 70 page 132²¹ – 79, 80, 81, 82 page 133²² [Magnard]

3.3 Produit de fonctions dérivables

Propriété 3 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Alors la fonction (uv) est dérivable sur I et sa dérivée est $u'v + uv'$.

On note : $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

f est de la forme uv avec : $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Par suite, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Exercice : Pour aller plus loin...

À l'aide de la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f de l'exemple précédent est aussi dérivable en zéro et que $f'(0) = 0$.

Exercices : 49 page 130²³ [Magnard]

3.4 En résumé...

Le tableau 2 résume les différentes règles de dérivation ainsi que leurs conditions d'applications.

	Opération	Dérivée	Conditions d'utilisation
Somme de deux fonctions	$u + v$	$u' + v'$	u et v dérivables sur I
Multiplication par une constante	ku	ku'	u dérivable sur I
Produit de deux fonctions	uv	$u'v + uv'$	u et v dérivables sur I

TABLE 2 – Opérations sur les fonctions dérivables

Exercices : 8 (sauf (d)), 9 (sauf (d)), 10 (f et g uniquement) page 127 et 53 (f et g uniquement) page 130²⁴ – 76 page 132, 88 page 134 et 100 page 135²⁵ – 77 page 132 et 78 page 133²⁶ – 86 page 133; 89, 90 page 134 et 101, 102 page 135²⁷ [Magnard]

Module : TP 1 page 138²⁸ [Magnard]

Références

[Magnard] MATHS 1RE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ, PROGRAMME 2019, MAGNARD

3, 5, 8, 9

20. Dérivée et multiplication par une constante.

21. Dérivée d'une somme.

22. Équation de tangente.

23. Dérivée d'un produit.

24. Calcul de dérivées.

25. Déterminer une fonction.

26. Applications concrètes.

27. Nombre dérivé et paramètres.

28. Construction de la courbe de la « chute libre »