Probabilités conditionnelles
Indépendance

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

1 Probabilités conditionnelles – Arbre pondéré **2**

1.1 Notion de probabilité conditionnelle 2

1.2 Arbre pondéré 2

1.3 Formule des probabilités totales 3

2 Notion d'indépendance **4**

2.1 Événements indépendants 4

2.2 Succession de deux épreuves indépendantes 4

Table des figures

1 Arbre de probabilités 2

2 Répétition d'épreuves indépendantes 5

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

Questions flash : Exercices 1, 2, 3, 4 page 269 [1] [Magnard]
Activités : 1 page 270 [2] [Magnard]
Module : TP 1 page 292 [3] [Magnard]

1 Probabilités conditionnelles – Arbre pondéré

1.1 Notion de probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé (ou, plus simplement, B sachant A) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques : 1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :

$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

2. $P_A(B)$ représente la probabilité de l'événement B dans l'univers A.

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Question flash : Exercices 11, 12 page 282 [4] [Magnard]
Exercices : 18, 19, 20 page 282 [5] – 1, 2 page 279 et 22, 23, 25 page 283 [6] – 3, 4 page 280 ; 26, 27, 28, 29, 30 page 283 et 49, 51, 3, 54 page 286 [7] [Magnard]

1.2 Arbre pondéré

Activité : Activité 2 page 275 [8] [Magnard]

On utilise souvent un arbre pondéré pour résumer une situation aléatoire donnée. Vous en trouverez un exemple sur la figure 1.

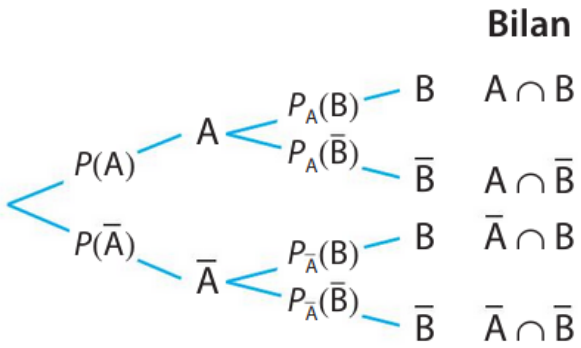

FIGURE 1 – Arbre de probabilités

1. Rappels sur les probabilités.
2. Découvrir les probabilités conditionnelles.
3. Parabole et méthode de MONTE-CARLO.
4. Notion de probabilité conditionnelle.
5. Comprendre les notations.
6. Calculer avec un tableau double-entrée.
7. Calculer avec des probabilités conditionnelles.
8. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Vocabulaire :
- Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche, on associe la probabilité de l'événement qui y mène ;
- un nœud est un croisement de plusieurs branches ;
- un chemin est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre ;
- l'événement bilan, situé à l'extrémité du chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

Exemple : Sur la figure 1, le chemin $-\overline{A}-B$ correspond à l'événement bilan $\overline{A}\cap B$.
En utilisant la Propriété 1, on peut calculer sa probabilité :

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(B)$$

Ce calcul revient à multiplier les probabilités sur les branches.

Remarque : Lors de l'utilisation d'un arbre pondéré, on a déjà les deux résultats suivants :
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;

Question flash : Exercice 13 page 282 [9] [Magnard]

Exercices : 55, 56, 57 page 286 [10] [Magnard]

1.3 Formule des probabilités totales

Activité : Activité 3 page 272 [11] [Magnard]

Propriété : Formule des probabilités totales (cas particulier)
Soit A un événement tel que $P(A)\neq 0$.
la probabilités de l'événement B est égal à la somme des probabilités suivante :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right)\\ &= P(A)\times P_A(B)+P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(B)\end{aligned}$$

Remarques :
1. Sur l'arbre pondéré de la figure 1, cela signifie que la probabilité de B est égal à la somme des probabilités des 2 chemins qui aboutissent à B.
2. Ce résultat se généralise.

Définition : Soient A_1, A_2, …, A_n n événements.
On dit que A_1, A_2, …, A_n forment une partition de l'univers Ω si les événements A_1, A_2, …, A_n sont deux-à-deux incompatibles et si $\Omega=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

Propriété : Formule des probabilités totales (cas général)
Soit A_1, A_2, …, A_n une partition de l'univers Ω et B un événement. On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots+P(B\cap A_n)\\ \text{où}\quad & P(B\cap A_i)=P(A_i)\times P_{A_i}(B)\end{aligned}$$

Remarque : On peut résumer touts les propriétés sur les probabilités conditionnelles en trois règles d'utilisation des arbres pondérés.

Utilisation d'un arbre pondéré :
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;
- la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités de tous les chemins qui y aboutissent .

9. Arbre pondéré.
10. Construire un arbre pondéré.
11. Découvrir la formule des probabilités totales.

Question flash : 13, 14 page 282 [12] [Magnard]

Exercices : 5, 6 page 280 ; 31, 33, 34 page 284 et 61 page 286 [13] – 58, 59 page 286 [14] – 62 page 286 ; 63, 65 page 287 [15] – 66, 67 page 287 [16] – 68 page 288 [17] [Magnard]

2 Notion d'indépendance

2.1 Événements indépendants

Activité : Activité 4 page 272 [18] [Magnard]

Définition : A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Remarques :

1. Il suffit de vérifier une seule des deux égalités pour que les événements soient indépendants.
2. Deux événements sont donc indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de l'autre.

Propriété : A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : Ceci est dû au fait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, avec $P_A(B) = P(B)$.

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On note :

l'événement A : « la carte est une dame »

l'événement B : « la carte est un cœur »

On a : $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

De plus, l'événement $A \cap B$ est « obtenir la dame de cœur » donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.

On a $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = P(A \cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Question flash : Exercices 15, 16 page 282 [19] [Magnard]

Exercices : 35, 36, 38, 39 page 284 ; 40 page 285 ; 71, 73, 74 page 288 ;et 76 page 289 [20] [Magnard]

2.2 Succession de deux épreuves indépendantes

Définition : On dit qu'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes lorsqu'on réalise *successivement* deux expériences aléatoires dans lesquelles les événements associés à la première expérience sont indépendants des événements associés à la deuxième.

Remarques :

1. Cela signifie que les résultats de la première épreuve n'ont pas d'influence sur la deuxième.
2. Cela correspondra très souvent à deux tirages successifs avec remise.

Exemple : Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules noires. On tire successivement deux boules *avec remise*.
Il y a bien répétition de deux épreuves indépendantes.

Représentation par un arbre pondéré : Voir figure 2

12. Utilisation d'un arbre pondéré
13. Utilisation d'un arbre pondéré.
14. Partition de l'univers.
15. Inversion du conditionnement.
16. Avec une probabilité inconnue.
17. Probabilités et suites.
18. Découvrir la notion d'indépendance.
19. Événements indépendants.
20. Événements indépendants.

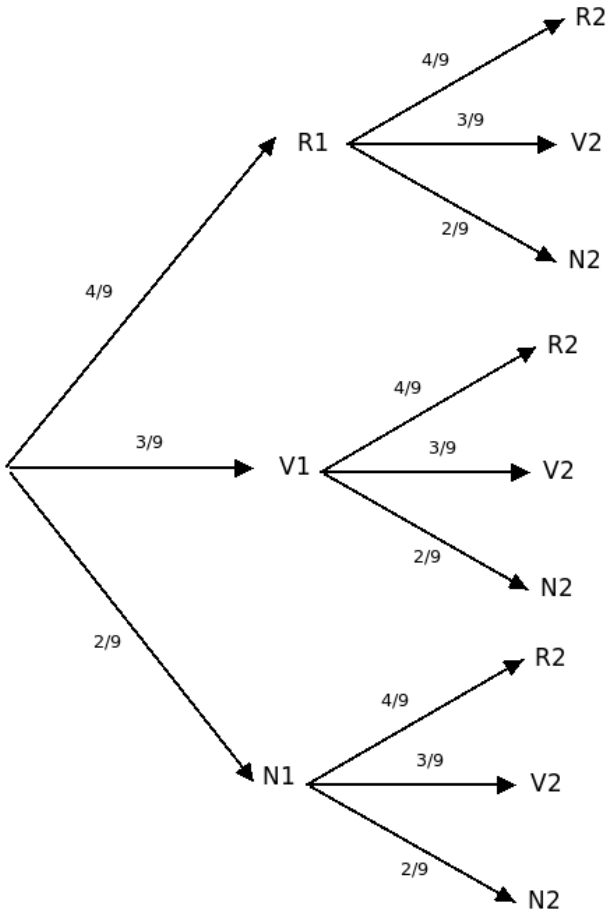

FIGURE 2 – Répétition d'épreuves indépendantes

Utilisation d'un tableau à double entrée : On calcule dans le tableau ci-dessous les probabilités d'obtenir des couples de boules de couleurs données :

		Épreuve 1		
		Rouge	**Vert**	**Noir**
Épreuve 2	**Rouge**	$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$	$\frac{3}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$	$\frac{2}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{81}$
	Vert	$\frac{4}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$	$\frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{6}{81} = \frac{2}{27}$
	Noir	$\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}$	$\frac{3}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{81} = \frac{2}{27}$	$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$

Question flash : Exercice 17 page 282 [21] [Magnard]

Exercices : 7, 8 page 281 ; 42, 44 page 285 et 77, 78, 79 page 289 [22] [Magnard]

Module : TP 2 page 293 [23] [Magnard]

Références

[Magnard] MATHS 1RE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ, PROGRAMME 2019,MAGNARD

21. Succession d'épreuves indépendantes.
22. Représenter une succession d'épreuves indépendantes.
23. Tirages « presque » indépendants.

2, 3, 4, 5