

Fonctions trigonométriques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

1	Repérage sur le cercle trigonométrique	3
2	Coordonnées sur le cercle	5
2.1	Cosinus et sinus	6
2.2	Quelques relations	6
2.3	Angles associés	7
2.4	Résolution d'équation et d'inéquation	11
3	Fonctions cosinus et sinus	12
3.1	Définition	12
3.2	La fonction cosinus	13
3.3	La fonction sinus	14

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Table des figures

1	Le cercle trigonométrique	3
2	Enroulement de la droite des réels	4
3	Le radian	5
4	Cosinus et sinus	6
5	Angles remarquables	7
6	Cosinus et sinus de $-x$	8
7	Cosinus et sinus de $\pi - x$	8
8	Cosinus et sinus de $\pi + x$	9
9	Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$	9
10	Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} + x$	10
11	Cercle trigonométrique avec valeurs remarquables.	10
12	Un exemple de résolution d'équation trigonométrique	11
13	Un exemple de résolution d'équation trigonométrique	12
14	Fonction paire	13
15	Fonction cosinus	13
16	Fonction paire	14
17	Fonction sinus	15

Liste des tableaux

1	Correspondance degrés/radians	5
2	Valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente	7
3	Tableau de variations de la fonction cosinus	14
4	Tableau de variations de la fonction sinus	15

Questions flash : Exercices 2, 3, 4 page 197¹ et 5, 6 page 197² [Magnard]

Activités : 1³ et 2⁴ page 198 [Magnard]

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1 Repérage sur le cercle trigonométrique

Définition :

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , origine du repère, et de rayon $OI = 1$. (voir figure 1).

On choisit une **orientation** sur ce cercle :

- le sens **direct** (ou positif) est le sens contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ;
- le sens **indirect** (ou négatif) est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

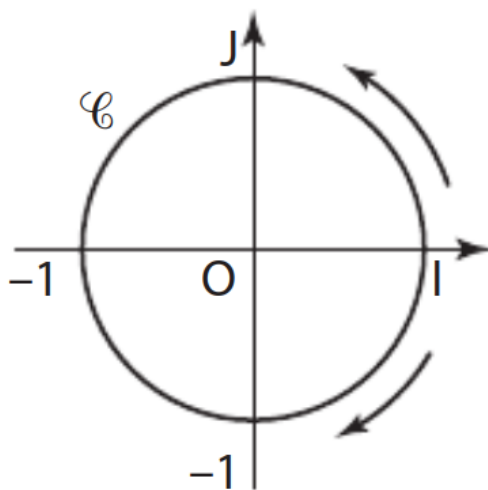


FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique

Propriété : Repérage sur le cercle trigonométrique

Pour **repérer** un point M sur le cercle trigonométrique, on « enroule » autour du cercle un axe vertical orienté vers le haut, gradué et d'origine le point I (voir figure 2).

On peut alors **repérer** le point M par l'**abscisse x du point correspondant, obtenu par enroulement, sur l'axe vertical.**

Exemples :

1. Le **point I** est associé aux valeurs $0, 2\pi, 4\pi$ mais aussi -2π par exemple (en tournant dans le sens indirect).
Plus généralement, **tous les réels associés au point I** sont de la forme $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce sont ceux qui correspondent à **des tours complets** sur le cercle trigonométriques.
2. Le **point J** est associé à la valeur $\frac{\pi}{2}$, mais aussi $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ par exemple.

Remarque : Le **point M** associé au réel x est aussi associé à $x + 2\pi, x + 4\pi, x - 2\pi$, etc.

Plus généralement, il est associé à tout réel de la forme $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Le point M est donc repéré « au tour près ».

1. Fractions et trigonométrie.
2. Fonctions de références, parité
3. Découvrir le cercle trigonométrique.
4. Se repérer sur le cercle trigonométrique.

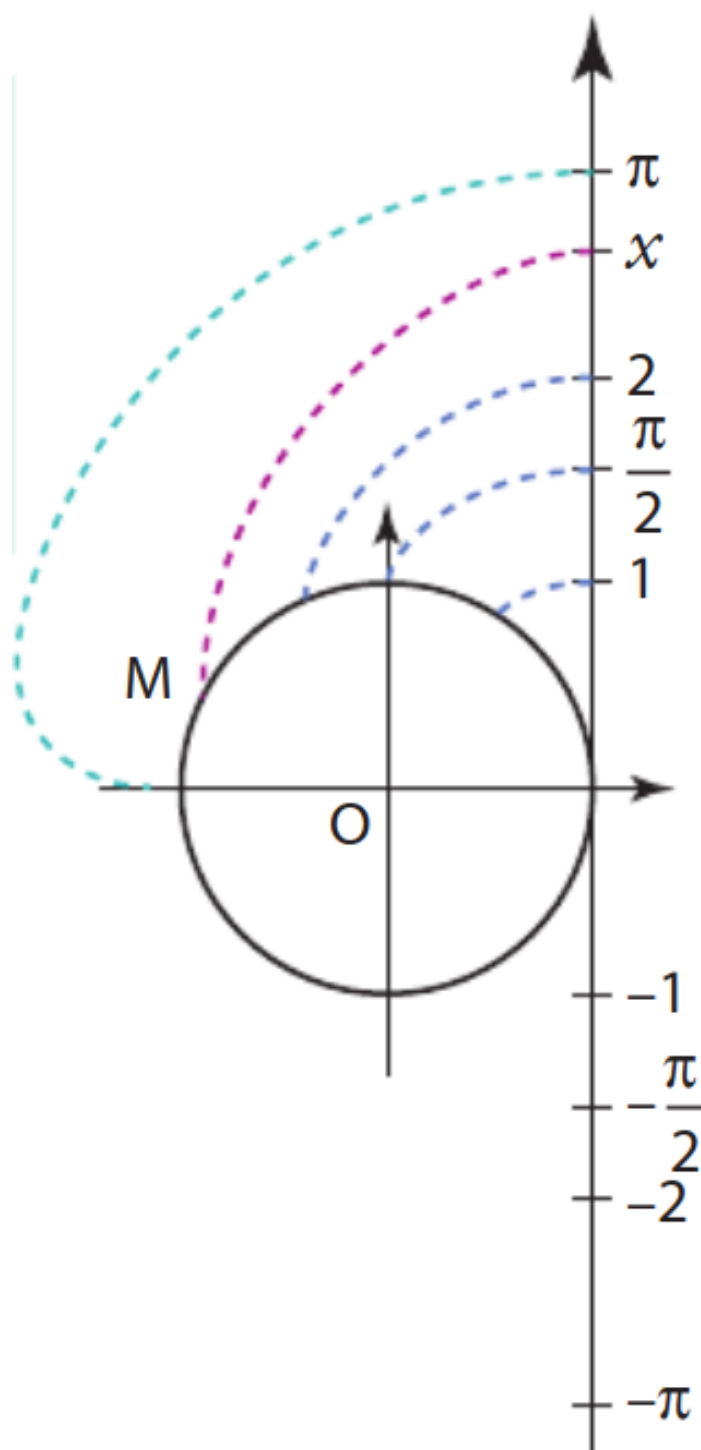


FIGURE 2 – Enroulement de la droite des réels

Définition Radian

Soit M un **point du cercle trigonométrique** et x le nombre réel associé tel que $0 \leq x < 2\pi$. (voir figure 3)

On dit que x est la **mesure en radian** de l'angle $\widehat{IOM}$.

Le symbole associé à cette mesure est **rad**.

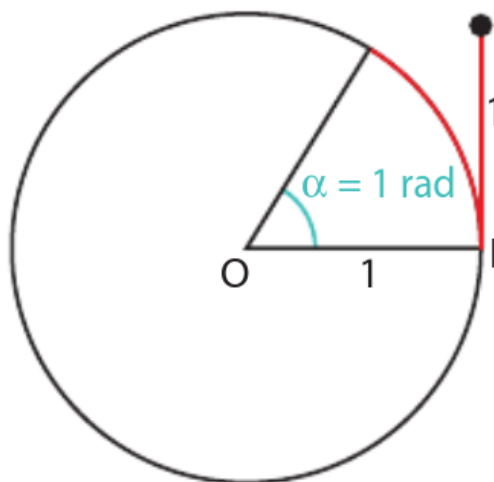


FIGURE 3 – Le radian

Remarques :

1. Les mesures des angles en degrés et en radians sont **proportionnelles**.
Pour passer de degrés en radians, il faut multiplier par $\frac{\pi}{180}$.
Par exemple, 1 radian correspond à $\frac{180}{\pi}$ degrés, c'est-à-dire à peu près $57,3^\circ$.
2. Le tableau 1 donne les correspondances degrés/radians des valeurs d'angles usuelles.

Mesure de l'angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure de l'angle en degré	0	30	45	60	90	180	360

TABLE 1 – Correspondance degrés/radians

Questions flash : Exercices 21, 22 page 208⁵ [Magnard]

Exercices : 1 page 205 et 26, 27 page 208⁶ – 2 page 205 et 25 page 208⁷ – 47 page 210⁸ – 46, 50, 51 page 210⁹ – 57, 58 page 211¹⁰ [Magnard]

2 Coordonnées d'un point sur le cercle trigonométrique

Activité : 3 page 199¹¹ [Magnard]

-
5. Repérage sur le cercle trigonométrique.
 6. Placer des points sur le cercle trigonométrique.
 7. Repérage sur le cercle trigonométrique.
 8. Symétries sur le cercle trigonométrique.
 9. Problèmes.
 10. Retrouver une mesure principale.
 11. Faire le lien entre triangle et cercle trigonométrique.

2.1 Cosinus et sinus

Définition : Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x par enroulement. (voir figure 4).

On appelle **cosinus et sinus** de x (notés $\cos x$ et $\sin x$) les coordonnées du point M dans le repère $(O; I; J)$.

$\cos x$: **abscisse** du point M

$\sin x$: **ordonnée** du point M .

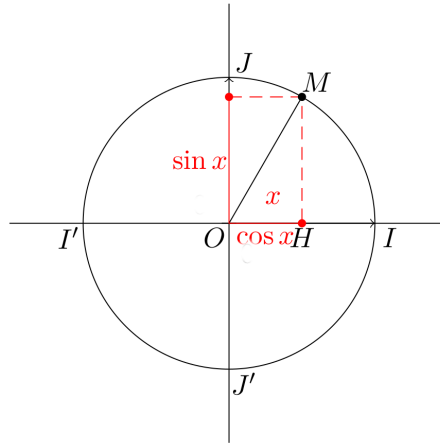


FIGURE 4 – Cosinus et sinus

Remarques : 1. Si $k \in \mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ est un autre réel associé au point M . On a donc :

$$\begin{aligned}\cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x\end{aligned}$$

2. $I(1; 0)$ donc : $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
 $J(0; 1)$ donc : $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
 $I'(-1; 0)$ donc : $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.
 $J'(0; -1)$ donc : $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

3. Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

Or, $OM = 1$, $OH^2 = (\cos x)^2$ et $HM^2 = (\sin x)^2$. On a donc :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Dans toute la suite, on notera : $\cos^2 x = (\cos x)^2$ et $\sin^2 x = (\sin x)^2$. La relation précédente devient alors :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2.2 Quelques relations

On a déjà les relations suivantes :

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Les cosinus et sinus des angles remarquables sont données dans le tableau 2.

Angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

TABLE 2 – Valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente

Remarque : Pour retenir tous les résultats du tableau 2, on peut s'aider du cercle trigonométrique (voir figure 5).

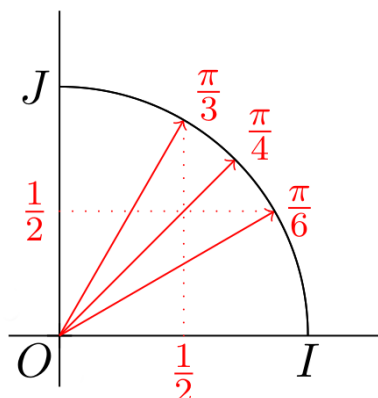


FIGURE 5 – Angles remarquables

Exercice : Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \beta$ sachant que :

- $\cos \alpha = 0,6$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$
- $\sin \beta = 0,8$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Question Flash : Exercice 23 page 208¹² [Magnard]

Exercices : 32, 33 page 209¹³ [Magnard]

2.3 Angles associés

Dans toute cette section, x désigne un réel et M le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique suivant la **Définition** du 2.1.

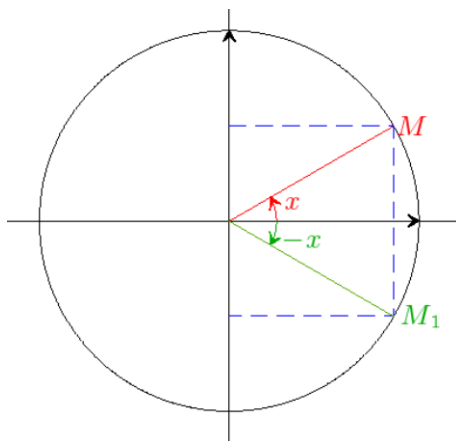
Cosinus et sinus de $-x$: voir figure 6.

$M(\cos x; \sin x)$ et $M_1(\cos(-x); \sin(-x))$.

Comme M et M_1 sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**, on en déduit que :

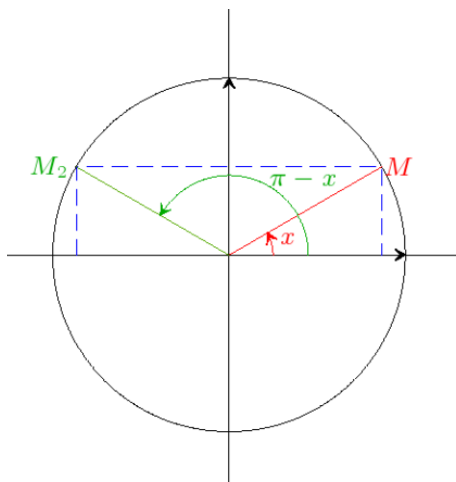
¹². Valeurs remarquables de cosinus et de sinus.

¹³. Signe de cosinus et de sinus.

FIGURE 6 – Cosinus et sinus de $-x$ **Cosinus et sinus de $-x$**

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}$$

Cosinus et sinus de $\pi - x$: voir figure 7.

FIGURE 7 – Cosinus et sinus de $\pi - x$

$M(\cos x; \sin x)$ et $M_2(\cos(\pi - x); \sin(\pi - x))$.

Comme M et M_2 sont **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**, on en déduit que :

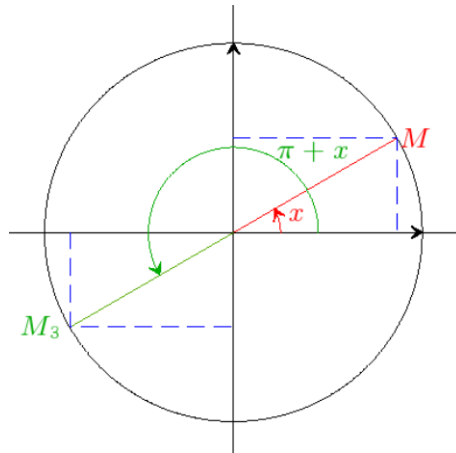
Cosinus et sinus de $\pi - x$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x\end{aligned}$$

Cosinus et sinus de $\pi + x$: voir figure 8.

$M(\cos x; \sin x)$ et $M_3(\cos(\pi + x); \sin(\pi + x))$.

Comme M et M_3 sont **symétriques par rapport à l'origine du repère**, on en déduit que :

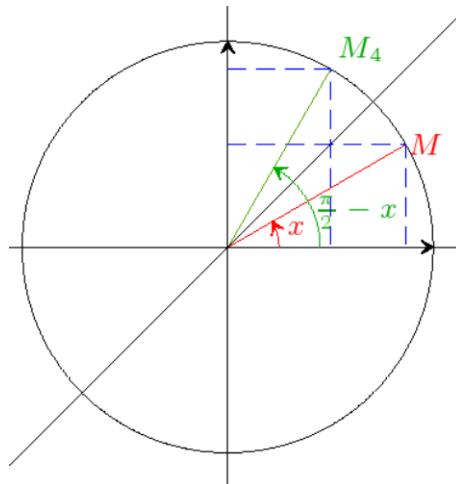
FIGURE 8 – Cosinus et sinus de $\pi + x$

Cosinus et sinus de $\pi + x$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$: voir figure 9.

FIGURE 9 – Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$

$M(\cos x; \sin x)$ et $M_4(\cos(\frac{\pi}{2} - x); \sin(\frac{\pi}{2} - x))$.

Comme M et M_4 sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** , on en déduit que :

Cosinus et sinus de $\pi + x$

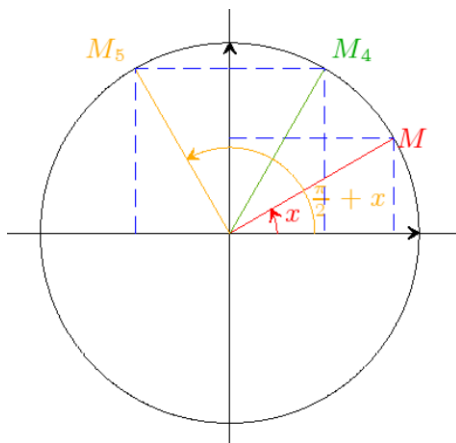
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} + x$: voir figure 10.

$M(\cos x; \sin x)$ et $M_5(\cos(\frac{\pi}{2} + x); \sin(\frac{\pi}{2} + x))$.

Comme M_4 et M_5 sont **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**, on en déduit que :

FIGURE 10 – Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} + x$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} + x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

Exemples : 1. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

2. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarques :

1. Pour retenir ces relations, il est vivement conseillé de se référer au cercle trigonométrique.
2. La figure 11 donne un cercle trigonométrique avec toutes les valeurs remarquables.

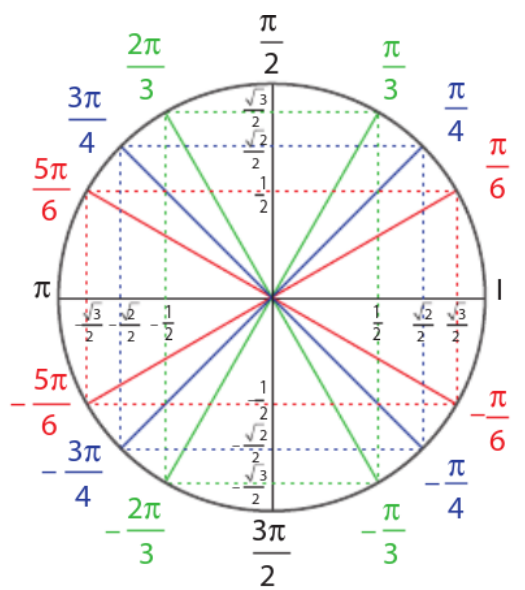


FIGURE 11 – Cercle trigonométrique avec valeurs remarquables.

Exercices : 3, 4 page 205 ; 29, 30, 31 page 208 et 52 page 210¹⁴ – 53, 54, 55 page 211¹⁵ [Magnard]

2.4 Exemples de résolution d'équation et d'inéquation trigonométrique

Exemple : Résolution d'équation trigonométrique

On veut résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Cela revient à chercher les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est égale à $\frac{1}{2}$.

Étape 1 : On construit le cercle trigonométrique et la droite verticale qui passe par l'abscisse $\frac{1}{2}$.
On pourra pour cet exemple se référer à la figure 12.

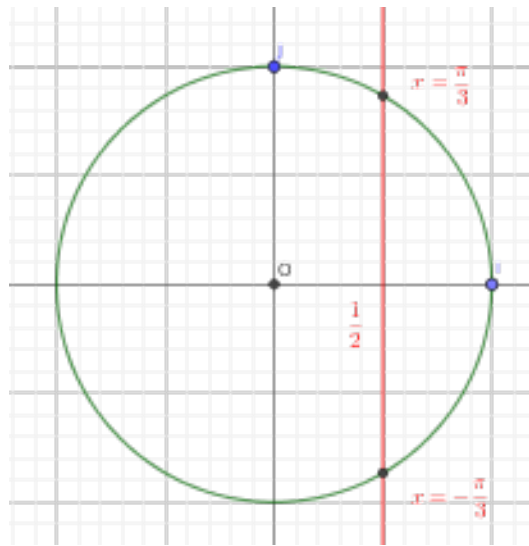


FIGURE 12 – Un exemple de résolution d'équation trigonométrique

Étape 2 : À l'aide des valeurs remarquables de cosinus et de sinus (et des angles associés), on détermine les valeurs de x correspondants aux intersections du cercle trigonométrique et de la droite.

On trouve ici $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = -\frac{\pi}{3}$.

Remarques :

- Attention à l'ensemble sur lequel il faut résoudre l'équation :
 - Sur $[0; 2\pi[$, l'ensemble solution est $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$;
 - Sur $[0; 4\pi[$, l'ensemble solution est $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \right\}$ (2 tours, donc deux fois plus de solutions...).
- Dans le cas d'équations trigonométriques avec un sinus, il faudra tracer une droite horizontale et non verticale.

Exercices : 7 page 206 ; 34 page 209 ; 59, 60 page 211¹⁶ – 63 page 211¹⁷ [Magnard]

Exemple : Résolution d'inéquation trigonométrique

On veut résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cela revient à chercher les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est inférieure ou égale à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Déterminer le sinus et le cosinus d'un nombre réel.
15. Avec plusieurs tours.
16. Équations trigonométriques.
17. Équations du second degré.

Étape 1 : On construit le cercle trigonométrique et la droite horizontale qui passe par l'ordonnée $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On pourra pour cet exemple se référer à la figure 13.

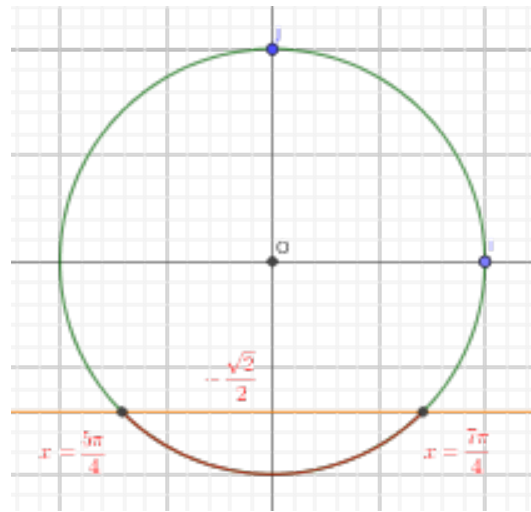


FIGURE 13 – Un exemple de résolution d'équation trigonométrique

Étape 2 : À l'aide des valeurs remarquables de cosinus et de sinus (et des angles associés), on détermine les valeurs de x correspondants aux intersection du cercle trigonométrique et de la droite.

On trouve ici $x = \frac{5\pi}{4}$ et $x = \frac{7\pi}{4}$.

Étape 3 : On en déduit l'arc de cercle solution ainsi que les valeurs de x correspondantes.

Ici, $S = \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right]$.

Remarque : Attention à l'ensemble sur lequel il faut résoudre l'inéquation. Par exemple, cette inéquation, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ a comme solution $S = \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

Exercices : 6, 8, 9, 10, 12 page 206 ; 35, 36 page 209 ; 61, 62 page 211 et 75 page 213¹⁸ – 64 page 211 et 74 page 213¹⁹ [Magnard]

3 Fonctions cosinus et sinus

Activité : Activité 4 page 199²⁰ [Magnard]

3.1 Définition

Définition : 1. La fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}$, associe $\cos x$ est appelée **fonction cosinus** et est notée :

$$\cos : x \rightarrow \cos x$$

2. La fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}$, associe $\sin x$ est appelée **fonction sinus** et est notée :

$$\sin : x \rightarrow \sin x$$

Remarque : Les images des fonctions sinus et cosinus sont toujours dans l'intervalle $[-1; 1]$.

18. Résolution d'inéquations trigonométriques.

19. Inéquations du second degré.

20. Découvrir de nouvelles fonctions.

3.2 La fonction cosinus

Périodicité : On a déjà vu que :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Ce qui signifie que si on décale les abscisses de 2π , les ordonnées sur la courbe de la fonction cosinus sont les mêmes.

Propriété : La fonction cosinus est **périodique** de période 2π .

Il suffit donc de tracer sa courbe représentative sur $[-\pi; \pi]$ et de répéter la courbe obtenue (voir figure 15).

Parité : On a déjà vu que :

$$\cos(-x) = \cos x$$

Pour la fonction cosinus, cela signifie que $f(-x) = f(x)$. On pourra se référer à la figure 14.

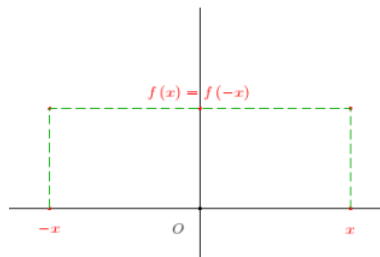


FIGURE 14 – Fonction paire

Propriété : La fonction cosinus est **paire**.

Sa courbe représentative est donc **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. (voir figure 15)

Courbe représentative : On a obtenu la courbe représentative de la fonction cosinus donnée sur la figure 15 a été obtenue de la façon suivante :

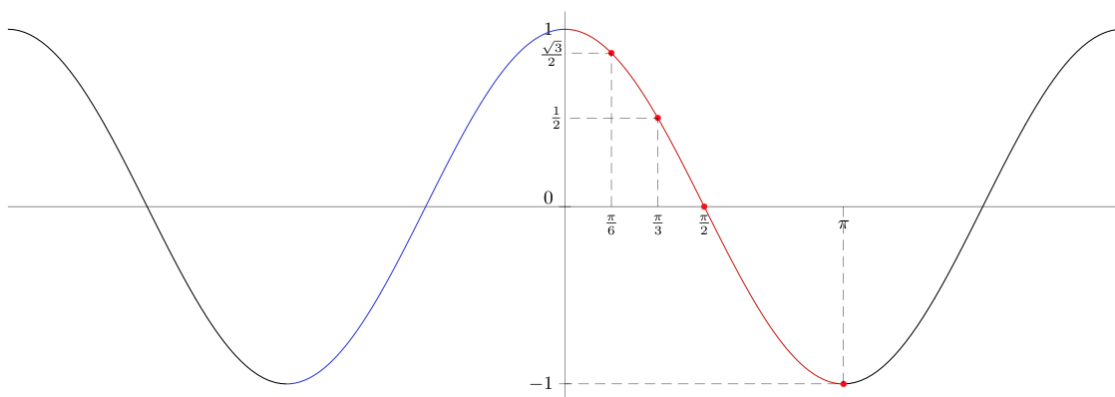


FIGURE 15 – Fonction cosinus

- La partie **rouge** des courbes (sur $[0; \pi]$) a été obtenue en utilisant les valeurs remarquables du tableau 2.
- La partie **bleue** des courbes a été obtenue en utilisant les symétries résultant de la parité.
- Le reste a été obtenu en utilisant la périodicité.

Tableau de variations : On peut en déduire le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, voir tableau 3).

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1

TABLE 3 – Tableau de variations de la fonction cosinus

3.3 La fonction sinus

Périodicité : On a déjà vu que :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Ce qui signifie que si on décale les abscisses de 2π , les ordonnées sur la courbe de la fonction sinus sont les mêmes.

Propriété : La fonction sinus est **périodique** de période 2π .

Il suffit donc de tracer sa courbe représentative sur $[-\pi ; \pi]$ et de répéter la courbe obtenue (voir figure 17).

Parité : On a déjà vu que :

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Pour la fonction cosinus, cela signifie que $f(-x) = -f(x)$. On pourra se référer à la figure 16.

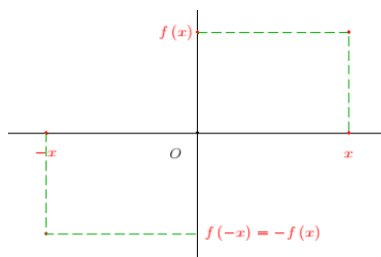


FIGURE 16 – Fonction paire

Propriété 2 : La fonction sinus est **impaire**.

Sa courbe représentative est donc **symétrique par rapport à l'origine du repère**. (voir figure 17)

Courbe représentative : On a obtenu la courbe représentative de la fonction sinus donnée sur la figure 17 a été obtenue de la façon suivante :

- La partie **rouge** des courbes (sur $[0 ; \pi]$) a été obtenue en utilisant les valeurs remarquables du tableau 2.
- La partie **bleue** des courbes a été obtenue en utilisant les symétries résultant de la parité.
- Le reste a été obtenu en utilisant la périodicité.

Tableau de variations : On peut en déduire le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, voir tableau 4).

Question flash : Exercice 24 page 208²¹ [Magnard]

Exercices : 13, 14, 15 page 207 ; 39, 40, 41 page 209 et 66, 67 page 212²² – 37, 38 page 209²³ – 42 page 209²⁴ [Magnard]

21. Reconnaissance de courbes.

22. Parité, périodicité.

23. Résolution d'équations et d'inéquations.

24. Reconnaissance de courbes.

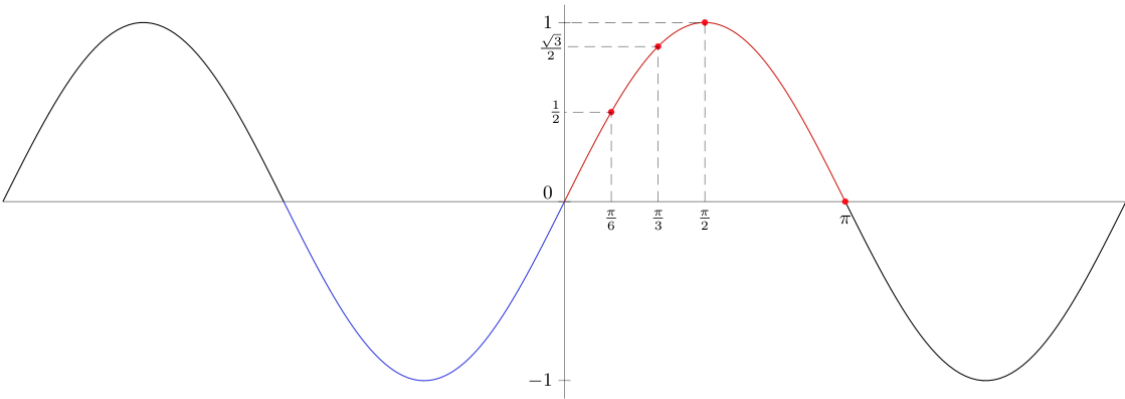


FIGURE 17 – Fonction sinus

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0

TABLE 4 – Tableau de variations de la fonction sinus

Références

[Magnard] MATHS 1RE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ, PROGRAMME 2019,MAGNARD
3, 5, 7, 11, 12, 14