Les fonctions exponentieles
de base a

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

Table des figures

En préliminaire au cours :

Activités : Activité 1 page 54 [1] et 4 page 55 [2] [Algomaths]

1 Fonctions exponentielles de base a

1.1 Définition

Soit $a > 0$. La suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison a admet comme forme générale $u_n = a^n$. On va prolonger l'ensemble de définition aux réels pour obtenir une fonction (voir figure 1).

Définition : Soit a un nombre réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$.
La courbe représentative de la fonction f est obtenue en prolongeant celle de la suite géométrique $u_n = a^n$. (voir figure1)

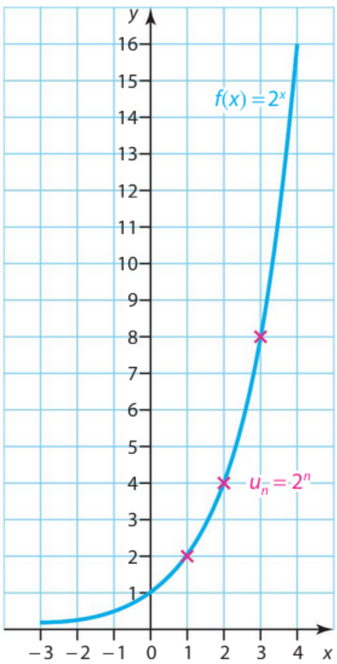

FIGURE 1 – Fonction exponentielle de base 2

Exemples :

1. La fonction $f(x) = 1,25^x$ est appelée fonction exponentielle de base 1,25.
2. La fonction exponentielle de base 0,875 est $f(x) = 0,875^x$

Remarques :

1. Comme $a > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$
2. On utilisera la calculatrice pour caluler les images par ces fonctions. Par exemple, $1,5^{5,1} \simeq 7,097$ à 10^{-3} près.

Questions Flash : 2, 3, 4 page 61 [3] – 5, 6, 7, 8, 9 page 61 [4] [Algomaths]

1. Baisse exponentielle des prix.
2. Lever le pied, c'est écologique
3. Suites géométriques de raison positive.
4. Fonction exponentielle de base a.

Exercices : 27, 29, 30, 38 page 62 [5] – 31, 32, 34, 35 page 62 [6] – 41, 42 page 62 [7] – 86, 88 page 65 [8] [Algomaths]

1.2 Propriétés algébriques

Les règles de calcul sur les exponentielles de base a sont les mêmes que pour les puissances entières.

Propriété : Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$a^{x+y} = a^x a^y$	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
$(a^x)^y = a^{x\times y}$	$(ab)^x = a^x \times b^x$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Exemples :

1. $7^{2,1} \times 7^{4,3} \times 7^{-\frac{1}{4}} = 7^{2,1+4,3-0,25} = 7^{6,15}$
2. $\dfrac{\left(5^{3,1}\right)^4}{5^{1,4}} = \dfrac{5^{3,1\times 4}}{5^{1,4}} = \dfrac{5^{12,4}}{5^{1,4}} = 5^{12,4-1,4} = 5^{11}$
3. $\dfrac{3^{1,5} \times 3^{-2}}{3^{-5}} = \dfrac{3^{1,5-2}}{3^{-5}} = \dfrac{3^{-0,5}}{3^{-5}} = 3^{-0,5+5} = 3^{-4,5} = \dfrac{1}{3^{4,5}}$
4. $(2 \times 7)^{4,2} \times 2^{-3} \times 7^{3,2} = 2^{4,2} \times 7^{4,2} \times 2^{-3} \times 7^{3,2} = 2^{4,2-3} \times 7^{4,2+3,2} = 2^{1,2} \times 7^{7,4}$

Questions flash : 10, 11, 12 page 61 [9] [Algomaths]

Exercices : 45, 47, 49, 51, 52, 54, 57 page 63 [10] – 89, 90 page 65 [11] [Algomaths]

2 Sens de variation

2.1 Rappel : sens de variation d'une suite géométrique

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison a et de premier terme u_0 strictement positif.

— Si $a > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
— Si $0 < a < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
— Si $a = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

2.2 Sens de variation de $x \to a^x$

Théorème : Soit a un réel strictement positif. (voir figure 2)

— Si $a > 1$, alors la fonction $f(x) = a^x$ est croissante.
— Si $0 < a < 1$, alors la fonction $f(x) = a^x$ est décroissante.
— Si $a = 1$, alors la fonction $f(x) = a^x$ est constante.

Exemples :

1. La fonction $f(x) = 2,3^x$ est croissante car $2,3 > 1$.
2. La fonction $f(x) = 0,23^x$ est décroissante car $0 < 0,23 < 1$.

5. Suites géométriques de raison positive.
6. Fonction exponentielle de base a.
7. Tableur et algorithme
8. Utilisation des fonctions exponentielles de base a
9. Propriétés algébriques.
10. Propriétés algébriques
11. Utilisation des propriétés algébriques.

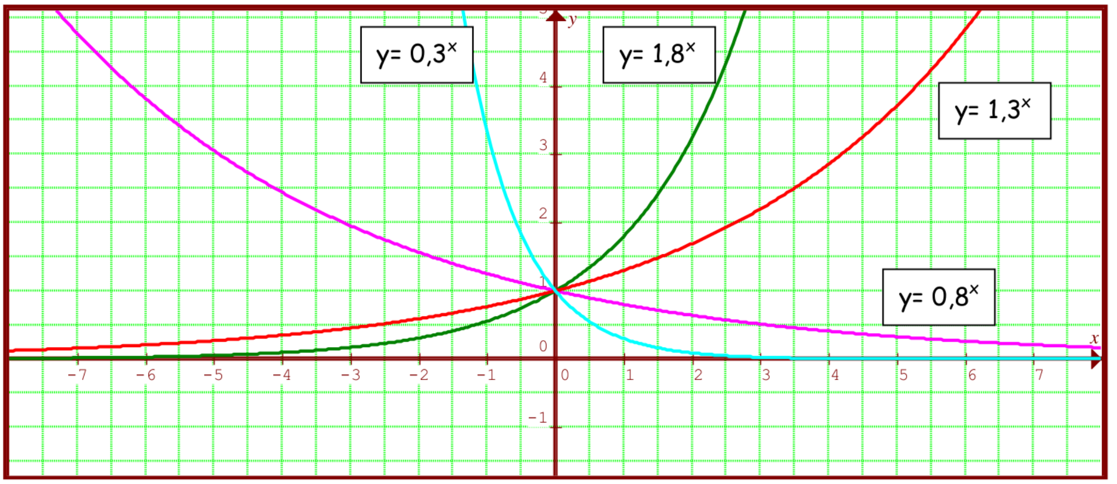

FIGURE 2 – Sens de variations de $x \to a^x$

3. La fonction $f(x) = 1,6^{-x}$ est décroissante car $f(x) = 1,6^{-x} = \dfrac{1}{1,6^x} = \dfrac{1^x}{1,6^x} = \left(\dfrac{1}{1,6}\right)^x = 0,625^x$et $0 < 0,625 < 1$.

Remarques :

1. On parle alors de croissance ou de décroissance exponentielle.
2. Toutes les courbes représentatives des fonctions exponentielles de base a passent par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

Questions flash : 14, 15 page 61 [12] [Algomaths]

Exercices : 59, 60, 61 page 63 [13] – 87 page 65 [14] [Algomaths]

2.3 Sens de variation de $x \to ka^x$

Théorème : Soit a un réel strictement positif et k un nombre réel non nul.
- Si $k > 0$, alors la fonction $f(x) = ka^x$ a le même sens de variations que la fonction $f(x) = a^x$.
- Si $k < 0$, alors la fonction $f(x) = ka^x$ a un sens de variations contraire à celui de la fonction $f(x) = a^x$.

Exemple : La fonction $f(x) = -2\,(0,457)^x$ est croissante car $0 < 0,457 < 1$ et $-2 < 0$.

Questions flash : 16, 18, 19 page 61 [15] [Algomaths]

Exercices : 62, 63, 64, 65, 66, 69 page 63 [16] – 92 page 66 [17] [Algomaths]

12. Sens de variations de $f(x) = a^x$.
13. Sens de variations de $f(x) = a^x$.
14. Utilisation de courbes représentatives.
15. Sens de variations de $f(x) = ka^x$.
16. Sens de variations de $f(x) = ka^x$.
17. Utilisation des exponentielles.

3 Application : le taux d'évolution moyen

3.1 Rappel : taux d'évolution global

Propriété : Lors d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient. On a :

$$V_0 \xrightarrow{CM_1} V_1 \xrightarrow{CM_2} V_2 \qquad \text{alors} \qquad CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$$

Le taux global d'évolution correspondant à deux évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1 et t_2 est donc le réel T tel que :

$$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)$$

Exemple : Une quantité augmente d'abord de 10 % puis baisse de 5 %.
On a : $CM_1 = 1 + 0,10 = 1,1$ et $CM_2 = 1 - 0,05 = 0,95$.
Le coefficient multiplicateur global est donc $CM_{\text{global}} = 1,1 \times 0,95 = 1,045$.
Ce qui correspond à un taux d'évolution global de 0,045, soit une augmentation globale de 4,5 %.

Propriété : Plus généralement, on a le résultat suivant :
Le taux global d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le réel T tel que :

$$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)\dots(1 + t_n)$$

Exercices : 76, 77, 78, 79 page 64 [18] [Algomaths]

3.2 Taux d'évolution moyen

Propriété : Le taux d'évolution moyen t correspondant à deux évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1 et t_2 est le taux qui, répété 2 fois, fournirait le même taux global.
On a donc : $(1+t)^2 = (1+t_1)(1+t_2)$ soit $1 + t = \sqrt{(1+t_1)(1+t_2)} = (1+T)^{\frac{1}{2}}$

Exemple : En 2020, une population a augmenté de 5 %, puis de 20 % en 2011.
Le coefficient multiplicateur global est $CM_{global} = 1,05 \times 1,2 = 1,26$ soit une augmentation de 26 % sur 2 ans.
Le taux dévolution t moyen sur 2 ans vérifie :

$$(1+t)^2 = 1,26$$

on a donc : $1 + t = \sqrt{1,26} \simeq 1,123$ donc $t \simeq 0,123$.
Cela correspond donc a une augmentation moyenne de 12,3 % par an.

Remarque : Il s'agit d'une « moyenne », mais pas au sens habituel. On appelle cette moyenne moyenne géométrique (la moyenne « habituelle » est appelée moyenne arithmétique).

Propriété : Le taux d'évolution moyen t correspondant à n évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le taux qui, répété n fois, fournirait le même taux global.
On a donc : $(1+t)^n = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$ soit $1 + t = ((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}} = (1+T)^{\frac{1}{n}}$

Exemple : En 2022, la même population a augmenté de 30 %
Le coefficient multiplicateur global est $CM_{global} = 1,05 \times 1,2 \times 1,3 = 1,638$ soit une augmentation de 63,8 % sur 3 ans.
Le taux dévolution t' moyen sur 3 ans vérifie :

$$(1+t')^3 = 1,638$$

on a donc : $1 + t' = (1,638)^{\frac{1}{3}}$ donc $t' \simeq 0,179$.
Cela correspond donc a une augmentation moyenne de 17,9 % par an.

18. Taux d'évolution global.

Questions flash : 20, 21, 22, 23, 24, 25 page 61 [19] [Algomaths]
Exercices : 80, 81, 83 page 64 [20] – 97, 98 page 66 et 99, 100, 101, 103, 104 page 67 [21] [Algomaths]

Références

[Algomaths] Collection Algomaths, Maths enseignement commun, Tle Séries Techno, DELAGRAVE, 2020.

2, 3, 4, 5, 6

19. Taux global, taux moyen
20. Taux d'évolution moyen.
21. Utilisation du taux moyen.