Dérivation
Compléments et applications

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

Liste des tableaux

---

1 Quelques rappels

1.1 Nombre dérivé – Tangente

Définition : Si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre fini lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est dérivable en a.
Ce nombre est alors appelé nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.
On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : Le nombre dérivé de f en a est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

1.2 Notion de fonction dérivée

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur l'intervalle I.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur l'intervalle I la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f'.

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

Les résultats concernant les dérivées des fonctions usuelles sont résumés dans le tableau 1.

fonction f	dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles

1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 1 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' + v'$.
On note : $(u+v)' = u' + v'$.

Propriété 2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est ku'.
On note : $(ku)' = ku'$.

Propriété 3 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction (uv) est dérivable sur I et sa dérivée est $u'v + uv'$.
On note : $(uv)' = u'v + uv'$.

2 Compléments de dérivation

2.1 Inverse d'une fonction dérivable

Propriété 4 : Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $-\dfrac{v'}{v^2}$.
On note : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ définie sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
f est de la forme $\frac{1}{v}$, où $v(x) = 3x - 1$.
v est dérivable sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, ne s'annule pas sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $v'(x) = 3$.
Par suite, f est dérivable sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x-1)^2}$.

2.2 Quotient de fonctions dérivables

Propriété 5 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telle que, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
On note : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+5}{x-2}$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 4x + 5$ et $v(x) = x - 2$.
u et v sont dérivables sur $]2\,;+\infty[$, on a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$. De plus, v ne s'annule pas sur $]2\,;+\infty[$.
Par suite, f est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{4 \times (x-2) - (4x+5) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{4x - 8 - 4x - 5}{(x-2)^2} = -\frac{13}{(x-2)^2}$$

Exercices : 8, 9, 10 page 127 et 50, 51, 53 page 130 [1] – 96 page 135 [2] – 102 page 135 [3] [Magnard]

2.3 Dérivée de $f(ax+b)$

Propriété 6 : Soit $x \longrightarrow ax + b$ une fonction affine et f une fonction dérivable sur un intervalle J.
Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I, ax + b \in J$.
On note h la fonction définie sur I par $h(x) = f(ax+b)$.
Alors la fonction h est dérivable sur I et :

$$h'(x) = a \times f'(ax+b)$$

1. Calcul de dérivées
2. Sécante et tangente.
3. Tangente commune

Exemple : Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{3x-1}$.

Ici, $f(x) = \sqrt{x}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour que f soit dérivable, il faut donc que $3x-1 \in]0\,;+\infty[$, c'est-à-dire que $3x-1>0$, ce qui équivaut à $x > \dfrac{1}{3}$.

La fonction h est donc dérivable sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et sa dérivée est :

$$h'(x) = 3 \times f'(3x-1) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

Exercices : 11, 12 page 127 ; 52 page 130 ; 71 page 132 et 94, 95 page 135 [4] [Magnard]

2.4 En résumé...

Le tableau 2 résume les différentes règles de dérivation ainsi que leurs conditions d'applications.

	Opération	**Dérivée**	**Conditions d'utilisation**
Somme de deux fonctions	$u+v$	$u'+v'$	u et v dérivables sur I
Multiplication par une constante	ku	ku'	u dérivable sur I
Produit de deux fonctions	uv	$u'v+uv'$	u et v dérivables sur I
Inverse d'une fonction	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$
Quotient de deux fonctions	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$
Composée de deux fonctions	$f(ax+b)$	$a \times f'(ax+b)$	f une fonction dérivable sur un intervalle J. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$,$ax+b \in J$.

Table 2 – Opérations sur les fonctions dérivables

3 Applications de la dérivation

3.1 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Remarques : 1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.

2. Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit donc d'étudier le signe de sa dérivée. Néanmoins, dans certains cas simples (trinôme du second degré ou fonction affine par exemple), ceci n'est pas toujours nécessaire.

Exemples : 1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 2 = x^2 + x - 2$.

Il faut déterminer le signe de f'. Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times 1 \times (-2) = 1+8 = 9$.

$\Delta > 0$, il y a deux racines : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

On en déduit le signe de f' :

4. Dérivation de fonctions composées.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	$\frac{25}{3}$	$\searrow$	$\frac{23}{6}$	$\nearrow$	

Avec :
$f(-2) = \frac{1}{3} \times (-2)^3 + \frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 5 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 + 5 = -\frac{8}{3} + 11 = -\frac{8}{3} + \frac{33}{3} = \frac{25}{3}$
$f(1) = \frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 - 2 \times 1 + 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 5 = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 3 = \frac{5}{6} + \frac{18}{6} = \frac{23}{6}$

2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$$

On pose : $u(x) = 4x + 3$ $\quad v(x) = x^2 + 1$
$u'(x) = 4$ $\quad v'(x) = 2x$

$$g'(x) = \frac{4 \times \left(x^2+1\right) - (4x+3) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2 - 6x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Comme pour tout x de $\mathbb{R}$, $\left(x^2+1\right)^2$ est strictement positif (c'est un carré), $g'(x)$ est du signe de $-4x^2 - 6x + 4$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-4) \times 4 = 36 + 64 = 100$.
Comme $\Delta > 0$,il y a deux racines : $x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times(-4)} = \frac{6-10}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times(-4)} = \frac{6+10}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$.
On en déduit le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Et le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de $g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	

Avec :
$g(-2) = \frac{4\times(-2)+3}{(-2)^2+1} = \frac{-8+3}{4+1} = \frac{-5}{5} = -1$
$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times\frac{1}{2}+3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{2+3}{\frac{1}{4}+1} = \frac{5}{\frac{5}{4}} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$

Exercices : 29 page 153 ; 33, 40 page 154[5] – 1, 2, 3 page 150 ; 30 page 153 ; 36, 37, 38 page 154[6] – 59, 62, 63, 65, 66 page 156[7] – 26 page 153 ; 53, 54, 55, 57 page 156[8] – 73, 74, 75 page 157 et 76, 77, 79, 80 page 158[9] – 88 page 159 et 89 page 160[10] [Magnard]

3.2 Extremum local

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$.
On dit que $f(c)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant c et inclus dans I tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$).

5. Signe de la dérivée.
6. Variations de fonctions.
7. Étude de fonctions.
8. Positions relatives de courbes.
9. Variations et inégalités.
10. Courbes et tangentes.

Remarque : 1. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minium local.

2. On peut remarquer sur f est dérivable et si $f(x_0)$ est un extremum local, alors $f'(x_0) = 0$. Mais attention à la réciproque...

Propriété (admise) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$, x_0 n'étant pas une extrémité de I.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Exercices : 42, 43, 46 page 155 [11] – 4, 5 page 151 ; 47, 48 page 155 ; 81, 83, 84 page 158 et 85, 86 page 159 [12] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 1re Enseignement de spécialité, Programme 2019,Magnard

3, 4, 5, 6

11. Extremum local.
12. Problèmes d'optimisation.