

Suites arithmétiques et géométriques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

1	Suites arithmétiques	2
1.1	Définition, exemples	2
1.2	Sens de variation d'une suite arithmétique	2
1.3	Expression en fonction de n	3
1.4	Programmes Python	3
2	Suites géométriques	3
2.1	Définition, exemples	4
2.2	Sens de variation d'une suite géométrique	5
2.3	Expression en fonction de n	5
2.4	Programmes Python	5
3	Sommes de termes	6
3.1	Suites arithmétiques	6
3.2	Suites géométriques	7

Liste des algorithmes

1	Suite arithmétique 1	3
2	Suite arithmétique 2	4
3	Suite géométrique 1	6
4	Suite géométrique 2	6
5	Somme de termes 1	8
6	Somme de termes 2	8

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

1 Suites arithmétiques

Activité : Activité 3 page 45¹ [Magnard]

1.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le **même nombre** réel r . On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples : 1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, ... est arithmétique de raison 5.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

est arithmétique de raison (-3) .

3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... est arithmétique de raison 1.

4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Propriété : Une suite (u_n) est **arithmétique** si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est **constante** pour tout entier n .

Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n - 2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n - 2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 \end{aligned}$$

La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n^2$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \end{aligned}$$

Le résultat dépend de n , la suite n'est donc pas arithmétique.

3. Soit (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = w_n + \sqrt{2} \end{cases}$$

Par définition, la suite est arithmétique de raison $\sqrt{2}$.

Remarque : On aurait pu montrer plus facilement à l'exemple 2 que la suite *n'est pas* arithmétique en utilisant un **contre-exemple** :

On a $v_0 = 0$; $v_1 = 1 = v_0 + 1$ et $v_2 = 4 \neq v_1 + 1$.

La suite (v_n) n'est donc pas arithmétique.

Exercices : 50 page 65² - 10 page 60 et 56, 57 page 66³ - 58 page 66⁴ - 59, 60 page 66⁵ [Magnard]

1.2 Sens de variation d'une suite arithmétique

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Remarque : Cela est dû au fait que $u_{n+1} - u_n = r$.

1. Découvrir les suites arithmétiques.
2. Utiliser une suite arithmétique.
3. Reconnaître une suite arithmétique.
4. Représentation graphique d'une suite arithmétique.
5. Problèmes concrets.

1.3 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

— Si le premier terme est u_0 , on a :

$$u_1 = u_0 + r \quad u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \quad u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

— Si le premier terme est u_1 , on a :

$$u_2 = u_1 + r \quad u_3 = u_2 + r = (u_1 + r) + r = u_1 + 2r \quad u_4 = u_3 + r = (u_1 + 2r) + r = u_1 + 3r$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1 . Alors :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison (-2) .

On a : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.

En particulier : $u_{50} = 7 - 2 \times 50 = 7 - 100 = -93$.

2. Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison $1,5$.

On a : $v_n = v_1 + (n-1)r = 3 + (n-1) \times 1,5 = 3 + 1,5n - 1,5 = 1,5n + 1,5$.

En particulier : $v_{50} = 1,5 \times 50 + 1,5 = 76,5$.

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Question flash : Exercices 26, 27 page 64⁶ [Magnard]

Exercices : 9 page 60 ; 51, 52, 53, 54 page 65⁷ – 104, 105, 106 page 69⁸ [Magnard]

1.4 Programmes Python

Voici deux exemples de programmes PYTHON permettant le calcul de termes de suites arithmétiques :

1. Le programme 1 calcule le terme u_{10} de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 4.

Algorithme 1 Suite arithmétique 1

```
u = 5
for n in range (10) :
    u = u + 4
print (u)
```

2. Le programme 2 calcule le terme u_{10} de la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison 0,5.

Attention au décalage de termes à calculer dans la boucle, car u_1 est déjà calculé...

2 Suites géométriques

Activité : Activité 4 page 45⁹ [Magnard]

6. Utiliser une suite arithmétique.
7. Utiliser une suite arithmétique.
8. Problèmes concrets.
9. Découvrir les suites géométriques.

Algorithme 2 Suite arithmétique 2

```

u = 4
for n in range (9) :
    u = u + 0.5
print (u)

```

2.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le **même nombre** réel q . On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples : 1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

est géométrique de raison $(-\frac{1}{2})$.

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (-1) .

4. On augmente tous les ans une quantité de 5%. La suite obtenue est $u_{n+1} = 1,05u_n$. C'est donc une suite géométrique de raison 1,05.

Propriété : Une suite (u_n) à termes non nuls est **géométrique** si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est **constante** pour tout entier n .
Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$.

On a $u_{n+1} = 5 \times 3^{n+3}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = \frac{3^{n+2} \times 3}{3^{n+2}} = 3$$

La suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5 \times 3^2 = 45$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$.

On a $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{3^n}{4^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} \times \frac{4^{n+1}}{3^n} = \frac{3^{n+1} \times 4^{n+1}}{3^n \times 4^{n+2}} = \frac{3^n \times 3 \times 4^{n+1}}{3^n \times 4^{n+1} \times 4} = \frac{3}{4}$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3^0}{4^1} = \frac{1}{4}$.

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \sqrt{n+1}$.

On a $\frac{w_1}{w_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2$ donc la suite (w_n) n'est pas géométrique.

Exercices : 61 page 66¹⁰ – 12 page 61 et 67 page 66¹¹ – 68, 69 page 66¹² [Magnard]

10. Utiliser une suite géométrique.

11. Reconnaître une suite géométrique.

12. Problèmes concrets.

2.2 Sens de variation d'une suite géométrique

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 **positif**.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Remarques :

1. Si $u_0 > 0$ et $q > 0$ alors (u_n) est à termes strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
2. Si $q < 0$, la suite (u_n) **n'est pas monotone**.
3. Si $u_0 < 0$, les résultats sont inversés :
 - Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.
 - Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

2.3 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

- Si le premier terme est u_0 , on a :

$$u_1 = u_0 \times q \quad u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2 \quad u_3 = u_2 \times q = (u_0 \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit (u_n) une **suite géométrique de raison q** et de premier terme u_0 . Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

- Si le premier terme est u_1 , on a :

$$u_2 = u_1 \times q \quad u_3 = u_2 \times q = (u_1 \times q) \times q = u_1 \times q^2 \quad u_4 = u_3 \times q = (u_1 \times q^2) \times q = u_1 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit (u_n) une **suite géométrique de raison q** et de premier terme u_1 . Alors :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison 1,1.

On a : $u_n = u_0 \times q^n = 80 \times 1,1^n$.

En particulier : $u_{10} = 8 \times 1,1^{10} \simeq 207,5$.

2. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison 0,8.

On a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 100 \times 0,8^{n-1}$.

En particulier : $u_{10} = 100 \times 0,8^9 \simeq 13,42$.

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Question flash : Exercices 28, 29, 30 page 64¹³ [Magnard]

Exercices : 11 page 61 ; 62, 63, 64, 65, 66 page 65¹⁴ – 109, 110 page 70¹⁵ – 111 page 70 et 132 page 72¹⁶ – 113, 114, 115 page 70 et 133 page 72¹⁷ [Magnard]

Module : TP 1 page 76¹⁸ [Magnard]

2.4 Programmes Python

Voici deux exemples de programmes PYTHON permettant le calcul de termes de suites géométriques :

1. Le programme 3 calcule le terme u_5 de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 0,97.
2. Le programme 4 détermine le rang à partir duquel les termes de la suite précédente sont plus petits que 0,5.

-
13. Utiliser une suite géométrique.
 14. Utiliser une suite arithmétique.
 15. Problèmes concrets.
 16. Comparer une suite arithmétique et une suite géométrique.
 17. Suites arithmético-géométriques.
 18. Remboursement d'un emprunt à annuités constantes.

Algorithme 3 Suite géométrique 1

```

u = 1
for n in range (5) :
    u = u * 0.97

```

Algorithme 4 Suite géométrique 2

```

u = 1
n = 0
while u > 0.5 :
    n = n + 1
    u = u * 0.97

```

Exercices : 126, 127 page 71¹⁹ [Magnard]

3 Sommes de termes

3.1 Suites arithmétiques

Propriété : Soit S_n la somme des entiers de 1 à n .

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n$$

Alors, on a :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effet :

$$\begin{array}{rcccccccc}
 S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\
 \oplus S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1)
 \end{array}$$

Il s'agit d'une somme de n termes, tous égaux à $(n+1)$, on a donc :

On a donc :

$$2S_n = n(n+1)$$

soit, en divisant par 2 :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemples :

$$1. \ 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$$

$$2. \ 25 + 26 + \dots + 50 = 1 + 2 + 3 + \dots + 50 - (1 + 2 + \dots + 24) = 1275 - \frac{24 \times 25}{2} = 1275 - 300 = 975$$

3. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$.
On veut déterminer :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$$

19. Algorithmique - Programmation

Comme $u_n = u_0 + nr = 5 + 2n$, on a :

$$\begin{aligned} S &= 5 + (5 + 2 \times 1) + (5 + 2 \times 2) + \cdots + (5 + 2 \times 10) \\ &= 5 \times 10 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \cdots + 2 \times 10 \\ &= 50 + 2 \times (1 + 2 + \cdots + 10) \\ &= 50 + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 50 + 110 = 160 \end{aligned}$$

Exercices : 13, 15a, 16 page 62 et 70, 71, 72, 73 page 66²⁰ – 107, 108 page 69²¹ [Magnard]

3.2 Suites géométriques

Théorème : La somme des puissances successives d'une nombre q , avec $q \neq 1$, s'exprime sous la forme : Alors, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

En effet, si on note $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$:

$$\begin{array}{rcll} S & = & 1 & + q + q^2 + \cdots + q^n \\ qS & = & q & + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} \\ \hline S - qS & = & 1 & + 0 + 0 + \cdots + 0 + (-q^{n+1}) \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 - q^{n+1} \\ (1 - q)S &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

et, comme $q \neq 1$, $1 - q \neq 0$. D'où :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemples :

$$1. \quad 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$$

$$2. \quad \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{10}} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{10}} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right) \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{177147}}{\frac{2}{3}} - \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{177146}{177147} \times \frac{3}{2} - \frac{242}{243} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{88573}{59049} - \frac{121}{81} = \frac{88573}{59049} - \frac{88209}{59049} = \frac{364}{59049} \end{aligned}$$

3. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$.

On veut déterminer :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$$

20. Somme de termes d'une suite arithmétique

21. Problèmes concrets.

Comme $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$, on a :

$$\begin{aligned} S &= 5 + (5 \times 2) + (5 \times 2^2) + \dots + (5 \times 2^{1010}) \\ &= 5 \times (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}) \\ &= 5 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 5 \times 2047 = 10235 \end{aligned}$$

Programmes Python : Voici deux exemples de programmes PYTHON permettant le calcul de somme de termes de suites géométriques :

1. Le programme 5 calcule la somme des premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 0,97.

Algorithme 5 Somme de termes 1

```
u = 1
S =
for n in range (5) :
    u = u * 0.97
    S = S + u
```

2. Le programme 6 détermine le rang à partir duquel la somme précédente est plus grande que 10.

Algorithme 6 Somme de termes 2

```
u = 1
S = 1
n = 0
while S < 10 :
    n = n + 1
    u = u * 0.97
    S = S + u
```

Exercices : 14 page 62 ; 74 page 66 et 75, 76 page 67²² – 112 page 70²³ – 102, 103 page 69²⁴ [Magnard]

Références

[Magnard] MATHS 1RE ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ, PROGRAMME 2019,MAGNARD

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

22. Somme de termes d'une suite géométrique.

23. Problème concret.

24. Algorithmique et programmation.