La fonction exponentielle

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2022/2023

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

En préliminaire au cours :
Activités : Activités 1 [1] et 2 [2] page 170 [Magnard]

1 Existence et unicité de la fonction exponentielle

1.1 Deux résultats préliminaires

Rappel : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a, b deux nombres, avec $a \neq 0$.
Alors, la fonction $g : x \longrightarrow f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g' est définie par :

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration :
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.
D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, la fonction $u(x) = f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $u'(x) = -f'(-x)$.
Par suite, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$$

Or, comme, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$, on a :

$$h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$$

On obtient donc que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f(0) = 1$, $h(0) = f(0) \times f(0) = 1$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \times f(-x) = 1$.
Par suite, la fonction f ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Au cours de la démonstration, on a montré de plus que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$, c'est-à-dire que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1.2 La fonction exponentielle

Théorème – Définition : Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
Cette fonction est appelée exponentielle et on la note $\exp : x \longrightarrow \exp(x)$.

Démonstration :
On admettra l'existence d'une telle fonction.
Reste à montrer l'unicité d'une telle fonction. Supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g' = g$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $k(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$k'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2}$$

1. Conditions de croissance d'une population.
2. Construction graphique de la fonction exponentielle.

Or, comme, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$, on a :

$$k'(x) = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} = 0$$

On obtient donc que k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction k est donc constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$, $k(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 1$.
On obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Longleftrightarrow g(x) = f(x)$$

D'où l'unicité de la fonction f.

1.3 Premières propriétés

On a déjà obtenu les résultats suivants :

Propriété : — La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$
— $\exp(0) = 1$
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Remarque : En utilisant le **Rappel** du 1.1, on obtient le résultat suivant :
Soit a, b deux nombres, avec $a \neq 0$.
Alors, la fonction $g : x \longrightarrow \exp(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g' est définie par :

$$g'(x) = a \exp(ax + b)$$

2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

2.1 Quelques propriétés

Théorème 1 : Soient a et b deux réels. Alors :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

Démonstration :
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{\exp(a)} \times \exp(a + x)$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = \frac{1}{\exp(a)} \times (\exp)'(a + x) = \frac{1}{\exp(a)} \times 1 \times \exp'(a + x) = \frac{1}{\exp(a)} \times \exp(a + x) = h(x)$$

De plus, $h(0) = \dfrac{1}{\exp(a)} \exp(a + 0) = \dfrac{1}{\exp(a)} \exp(a) = 1$.
On a donc $h' = h$ et $h(0) = 1$. Or, d'après le 1.2, une telle fonction est unique.
D'où $h(x) = \exp(x)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\exp(a)} \exp(a + x) = \exp(x)$ ou encore $\exp(a + x) = \exp(a) \exp(x)$.
En particulier, pour $x = b$, on obtient $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.

Théorème 2 : Soient a, b deux réels et n un entier naturel.

1. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration :
1. D'après le théorème 1 : $\exp(a-a) = \exp(a)\exp(-a)$.

De plus, $\exp(a-a) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(a)\exp(-a) = 1$ et comme $\exp(a) \neq 0$, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.

2. D'après le théorème 1 : $\exp(a-b) = \exp(a)\exp(-b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

3. On note $u_n = \exp(na)$.

On a $u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(na+a) = \exp(na) \times \exp(a) = u_n \times \exp(a)$
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\exp(a)$ et de premier terme $u_0 = \exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$.
Par suite, on a $u_n = 1 \times (\exp(a))^n$ et donc $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Exercice : 42 page 180 [3] [Magnard]

Remarque : On retrouve des propriétés similaires à celles des puissances. D'où l'idée d'adapter les notations [4].

2.2 Une nouvelle notation

Définition : On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle.
On a donc $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarques : 1. A la calculatrice, on obtient $\mathrm{e} \simeq 2,71828$.

2. En utilisant le Théorème 2, on obtient :

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$$

On va généraliser cette notation.

Définition : Pour tout réel x, on note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

Remarque : ceci se lit indifféremment « exponentielle x » ou « e exposant x ».

On a déjà obtenu les résultats suivants :

Propriété :
- $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$
- Pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$; $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$

Exercices : 1, 2, 3, 5, 7, 8 page 176 et 44, 46 page 180 [5] [Magnard]

Remarque : On a aussi déja montré que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a.

Exercices : 106, 107, 108 page 184 et 109, 110, 113 page 185 [6] [Magnard]

3. Propriétés algébriques de l'exponentielle.
4. Ceci ne sera pas entièrement justifié en classe de Terminale S.
5. Simplification d'écritures comportant des exponentielles.
6. Exponentielle et suites.

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Dérivée de la fonction exponentielle

On a déjà vu le résultat suivant :

Propriété : — La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.
— Si a, $b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, la fonction $x \to e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$.

Exercices : 59, 60, 61 page 181 et 86, 88, 89, 91, 92 page 183 [7] [Magnard]

3.2 Signe – Variations

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Démonstration :
On peut remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Par suite, $e^x > 0$.

Remarque : Ce premier résultat a une application inattendu :
Comme $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}\times 2} = e^1 = e$ et comme $e^{\frac{1}{2}} > 0$, on en déduit que $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exercices : 68, 70 page 182 [8] [Magnard]

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : En effet, on a vu que $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$.
On en déduit le résultat suivant :

Propriété : Pour tous réels a et b, on a :
— $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
— $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.
— $e^a > e^b$ équivaut à $a > b$.

Remarque : En particulier, comme $e^0 = 1$:

$$e^x > 1 \iff x > 0$$

Exercices : 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 page 177 ; 50, 51 page 180 ; 54, 55 page 181 et 75, 77, 79, 80 page 182 [9] – 21, 22, 23, 25, 26 page 178 ; 57, 58 page 181 et 82, 83 page 182 [10] – 28, 29, 30, 31, 32 page 179 ; 63, 64 page 181 et 96, 97, 98, 101, 102 page 184 [11] [Magnard]

3.3 Courbe représentative

On peut alors donner le tableau de variations de la fonction exponentielle. on se référera au tableau 1.

On peut alors construire la courbe représentative de la fonction exponentielle à l'aide d'un tableau de valeurs en remarquant que chaque résultat trouvé correspond non seulement à l'ordonnée du point de la courbe mais aussi au coefficient directeur de la tangente (car $(\exp)' = \exp$). On se référera à la courbe de la figure 1.

7. Calcul de dérivées.
8. Propriétés algébriques.
9. Résolutions d'équations et d'inéquations.
10. Etude de signes.
11. Études de variations.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	

Table 1 – Tableau de variations de $x \to \mathrm{e}^x$

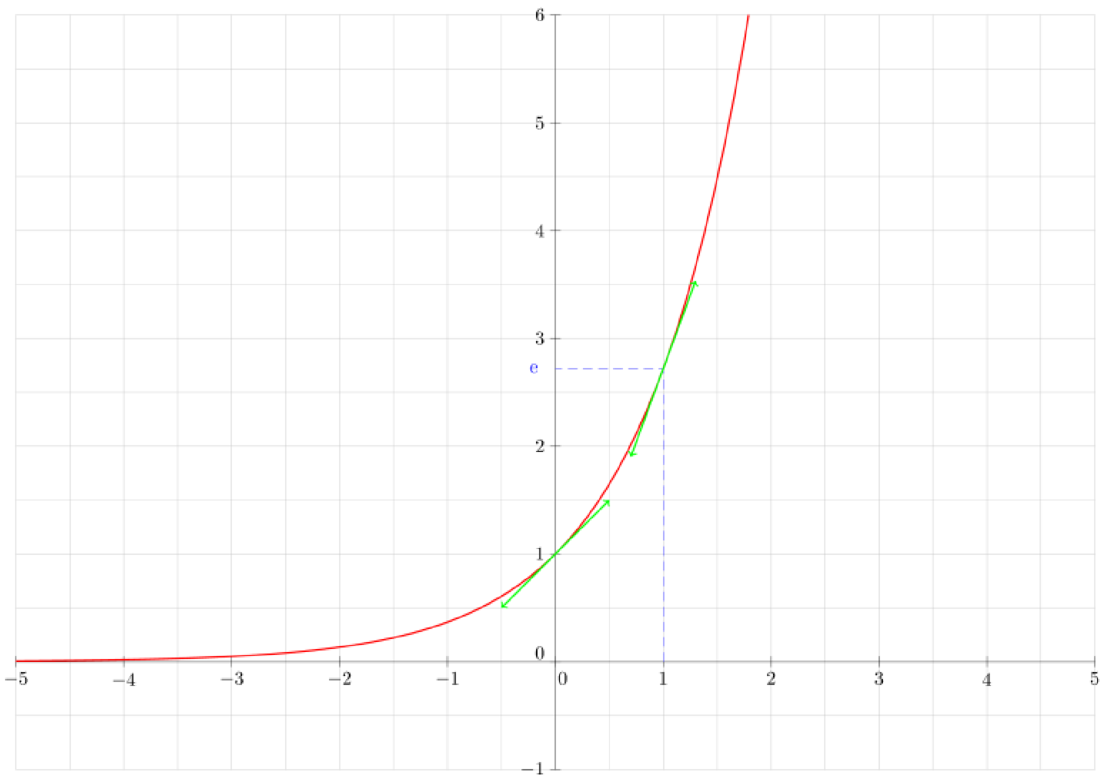

Figure 1 – Courbe représentative de $x \to \mathrm{e}^x$

Remarque : L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x \geq x + 1$$

Démonstration :

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = e^x - x - 1$.

On a $\phi'(x) = e^x - 1$.

Or, on a déjà vu que :

- Si $x < 0$, $e^x < 1$;
- Si $x > 0$, $e^x > 1$

On peut donc en déduire le tableau de variations de ϕ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

avec $\phi(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

On peut donc en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x - x - 1 \geq 0$.

Ceci revient bien à $e^x \geq x + 1$

Exercices de synthèse : 114, 115 page 185 et 117, 118 page 186 [12] – 123, 127, 128 page 187 [13] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 1re Enseignement de spécialité, Programme 2019,Magnard

2, 4, 5, 7

12. Modélisation.
13. Étude de fonctions.