Rappels de dérivation

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2024/2025

Table des matières

1 Nombre dérivé, fonction dérivée **2**

2 Dérivée et sens de variation **3**

Table des figures

1 Tangente à une courbe 2
2 Un premier exemple d'étude de variations 4
3 Un deuxième exemple d'étude de variations 5

Liste des tableaux

1 Dérivée des fonctions usuelles 2

En préliminaire au cours :

Activité : Automatismes nombre dérivé (sur fp)

1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.
Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées (voir figure 1), on dit que la fonction f est dérivable en a et on appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de cette tangente.
Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.

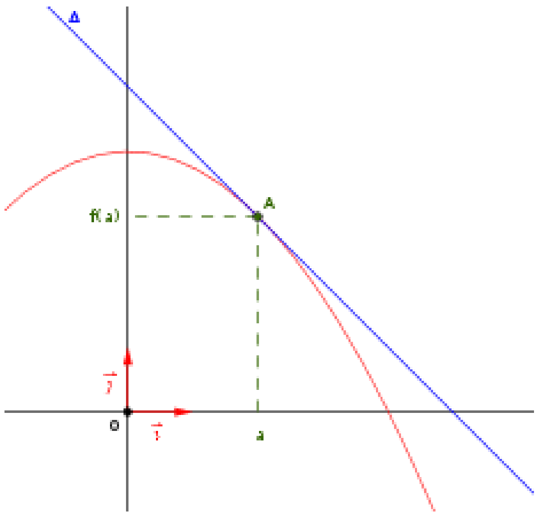

FIGURE 1 – Tangente à une courbe

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre :

- $f'(a)$: nombre dérivé de f en a, coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse a ;
- $f(a)$: image de a par f, ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.

Exercices : Détermination graphique d'un nombre dérivé (sur fp)

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur l'intervalle I. Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur l'intervalle I la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f'.

Remarque : On rappelle les dérivées des fonctions usuelles dans le tableau 1.

fonction	*dérivée*
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

TABLE 1 – Dérivée des fonctions usuelles

Propriété :

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
   Alors la fonction (kf) est dérivable sur I et sa dérivée est kf'.
   On note : $(kf)' = kf'$.
2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
   Alors la fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $f' + g'$.
   On note : $(f+g)' = f' + g'$.

Exemples :

1. $f(x) = -5x^3$ alors $f'(x) = -5 \times 3x^2 = -15x^2$
2. $g(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 1$ alors : $g'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 4 \times 1 - 0 = 9x^2 - 2x + 4$
3. $h(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + x + 7 = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + x + 7$ alors $h(x) = -\dfrac{1}{3} \times 3x^2 + \dfrac{5}{2} \times 2x + 1 + 0$

Exercices : Dérivation d'une fonction (sur fp)

2 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Remarques :

1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.
2. Pour étudier les variations d'une fonction, il faut donc étudier le signe de sa dérivée. Pour cela, on pourra se reporter à la **fiche de révisions sur les études de signes**.

Méthode : Détermination des variations d'une fonction

1. Calculer la dérivée f' de la fonction.
2. Déterminer le signe de la dérivée f'.
3. Dans un tableau de variations, regrouper le signe de f', les variations de f et les valeurs d'images importantes.
4. Utliser la calculatrice pour tracer la courbe de la fonction f pour vérifier la cohérence (attention à la fenêtre choisie).

Exemples :

1. f définie sur $I = [-3\,;\,6]$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 42$.

   On a $f'(x) = -2x + 3 \times 1 - 0 = -2x + 3$.

   Il faut déterminer le signe de f'.

   — le coefficient directeur est -2, donc la fonction affine correspondante est décroissante ;
   — $-2x + 3 = 0 \iff -2x = -3 \iff x = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$	

   Or, ici, $x \in [-3\,;\,6]$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-3		$1,5$		6
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	-60	$\nearrow$	$-39,75$	$\searrow$	-60

Remarques :

(a) les calculs de $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(10)$ se font à la calculatrice ;

(b) on peut vérifier les résultats en traçant la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice (voir figure 2) ;

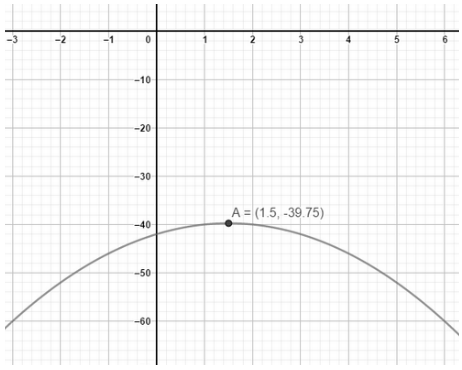

FIGURE 2 – Un premier exemple d'étude de variations

(c) f admet un maximum pour $x = 1,5$. Il est de $-39,75$.

2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
On a $g'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x + 0 = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

On construit le tableau de signes de g' :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Puis le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $g(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

Remarques :

(a) on peut vérifier les résultats en traçant la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice (voir figure 3) ;

(b) 1 est un maximum local de la fonction g et -3 est un minimum local de la fonction g.

Exercices : Études de fonctions (sur fp)

Exercices : Applications à des problèmes économiques (sur fp)

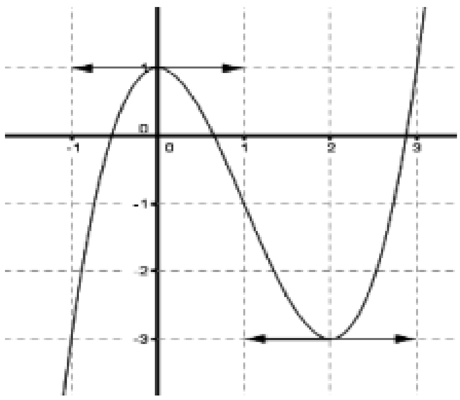

FIGURE 3 – Un deuxième exemple d'étude de variations