

Dérivation

Convexité

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2024/2025

Table des matières

1	Composée d'une fonction u par une fonction v	3
1.1	Définition - exemples	3
1.2	Dérivation d'une fonction composée	4
2	Convexité d'une fonction	5
2.1	Notion de convexité, de concavité	5
2.2	Inégalités liées à la convexité	7
3	Convexité et dérivées	7
3.1	Convexité et sens de variation de f'	7
3.2	Convexité et signe de f''	8
4	Convexité et tangente	8
4.1	Dérivée seconde et tangente	8
4.2	Dérivée seconde et point d'inflexion	9
4.3	Point d'inflexion	9

Liste des tableaux

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Table des figures

1	Sécante à une courbe	5
2	La fonction carrée	5
3	La fonction racine carrée	6
4	La fonction inverse	6
5	La fonction exponentielle	6
6	Inégalités et convexité	7
7	La fonction cube	9

1 Composée d'une fonction u par une fonction v

Activité : Activité 1 page 138¹ [Magnard]

1.1 Définition - exemples

Définition : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J , tels que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

On note $v \circ u$ la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

On peut résumer la situation par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} v \circ u : I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{v} & v(u(x)) \end{array}$$

Remarques :

1. Le symbole \circ se lit « **rond** ».
2. La condition « pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$ » permet d'assurer que $u(x)$ est bien dans l'ensemble de définition de v , donc que la deuxième partie du schéma est possible.
3. **Attention :** pour déterminer $v \circ u$, dans le schéma, il faut commencer par u .

Exemples : On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1. On va d'abord étudier $v \circ u(x) = v(u(x))$

On a donc le schéma suivant :

$$v \circ u : x \xrightarrow{u} u(x) = 2x + 1 \xrightarrow{v} v(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$$

On a donc $v \circ u(x) = \sqrt{2x + 1}$.

Déterminons l'ensemble de définition de cette fonction. Il faut que $2x + 1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2}$.

La fonction $v \circ u$ est donc définie sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

2. On va maintenant étudier $u \circ v(x) = u(v(x))$

On a donc le schéma suivant :

$$u \circ v : x \xrightarrow{v} v(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{u} u(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$$

On a donc $u \circ v(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

Déterminons l'ensemble de définition de cette fonction. Il faut que $x \geq 0$.

La fonction $u \circ v$ est donc définie sur $[0; +\infty[$.

Remarque : On peut voir grâce à cet exemple qu'en général $v \circ u \neq u \circ v$. Ces deux fonctions peuvent même avoir des ensembles de définition très différents.

Exercices : 1, 2 page 141 et 41, 42, 43, 44, 45 page 154² - 3, 4 page 141 et 47, 49 page 154³ [Magnard]

1. Voir des fonctions... à l'intérieur d'autres fonctions!
 2. Étudier un schéma de composition.
 3. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée.

1.2 Dérivation d'une fonction composée

Théorème : (admis)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$

Alors la fonction g définie par $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

Autrement dit, pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x + 1)^4$.

On a $f = v \circ u$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^4$.

Comme $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 4x^3$, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = 2 \times 4(2x + 1)^3 = 8(2x + 1)^3$$

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-x^2+1}$.

On a $g = v \circ u$ avec $u(x) = -x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$.

Comme $u'(x) = -2x$ et $v'(x) = e^x$, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$g'(x) = -2x \times e^{-x^2+1} = -2xe^{-x^2+1}$$

3. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

On a $g = v \circ u$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $f(x) = \sqrt{x}$.

u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = 2x$; v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$, f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$g'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Quelques cas particuliers importants :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

— La fonction u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2u'u$.

— La fonction u^3 est dérivable sur I et $(u^3)' = 3u'u^2$.

— Pour tout entier naturel n non nul, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

— Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, La fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

— Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, La fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$.

— Si pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, La fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

— La fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

Exercices : 5 page 143; 27, 28 page 153 et 53, 54, 55, 56, 58 page 155⁴ – 8 page 143; 21, 22 page 150; 61, 63, 64 page 155; 87, 89 page 158 et 130 page 163⁵ – 133 page 164⁶ – 134 page 164⁷ [Magnard]

Module : TP1 page 166⁸ et TP2 page 167⁹ [Magnard]

4. Dérivé de fonctions composées.
5. Étudier les variations d'une fonction composée.
6. Composition avec l'opposé.
7. Étudier une fonction composée.
8. Des composées particulières.
9. Étude d'une fonction à paramètre.

2 Convexité d'une fonction

2.1 Notion de convexité, de concavité

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.
 Soit A et B deux points de la courbe \mathcal{C} .
 On dit que la droite (AB) est une **sécante à la courbe \mathcal{C}** . (voir figure 1)

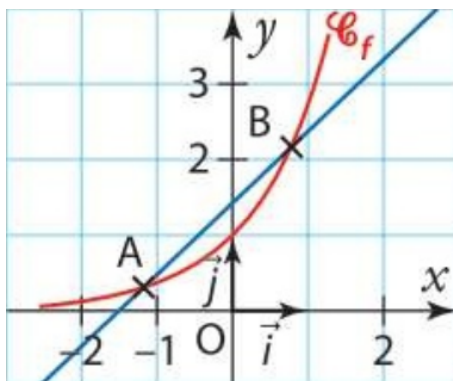


FIGURE 1 – Sécante à une courbe

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.
 — On dit que f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I , la courbe \mathcal{C} est **au-dessous** de toutes ses **sécantes**.
 — On dit que f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I , la courbe \mathcal{C} est **au-dessus** de toutes ses **sécantes**.

Exemples :

1. La fonction carrée $x \rightarrow x^2$ est convexe sur \mathbb{R} (voir figure 2).

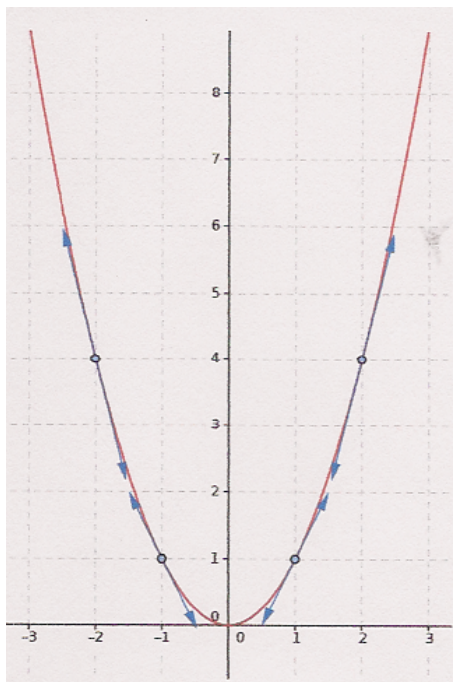


FIGURE 2 – La fonction carrée

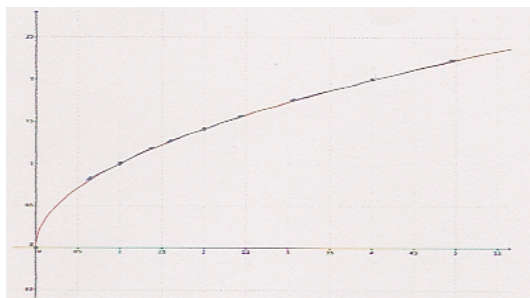


FIGURE 3 – La fonction racine carrée

2. La fonction racine carrée $x \rightarrow \sqrt{x}$ est concave sur $[0; +\infty[$ (voir figure 3).
3. La fonction inverse $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$ (voir figure 4).

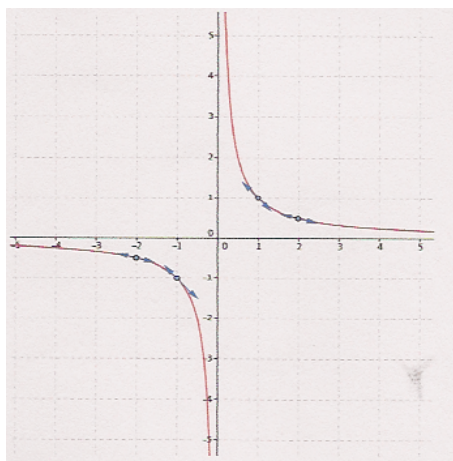


FIGURE 4 – La fonction inverse

4. La fonction exponentielle $x \rightarrow e^x$ est convexe sur \mathbb{R} (voir figure 5).

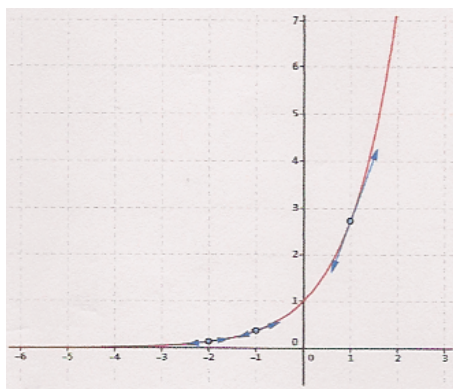


FIGURE 5 – La fonction exponentielle

Exercices : 9, 10 page 145 ; 29 page 153 ; 65 page 155 ; 66, 68 page 156¹⁰ [Magnard]

10. Lire la convexité sur un graphique.

2.2 Inégalités liées à la convexité

Propriété :

- Si f est une fonction **convexe** sur un intervalle I alors, pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0; 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

- Si f est une fonction **concave** sur un intervalle I alors, pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0; 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Remarque : pour comprendre cette propriété, on se référera à la figure 6 et aux explications suivantes :

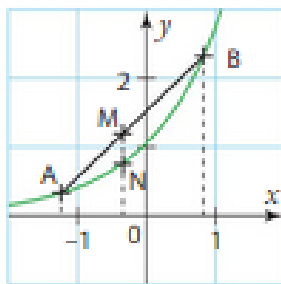


FIGURE 6 – Inégalités et convexité

- A est le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse x . On a donc $A(x; f(x))$;
- B est le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse y . On a donc $B(y; f(y))$;
- M est un point de sécante (AB) à la courbe \mathcal{C} . On admettra que ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme donc $M(tx + (1-t)y; tf(x) + (1-t)f(y))$;
- N est le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse $tx + (1-t)y$. On a donc $N(tx + (1-t)y; f(tx + (1-t)y))$;
- Comme f est convexe, N est au-dessous de M donc $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Exercices : 11, 12 page 145¹¹ [Magnard]

3 Convexité et dérivées

Activité : Activité 4 page 139¹² [Magnard]

3.1 Convexité et sens de variation de f'

Théorème : (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

Exercices : 13, 14 page 147 et 73, 74, 75 page 156¹³ [Magnard]

11. Démontrer des inégalités en utilisant la convexité.

12. Voir le lien entre courbes, sécantes et tangentes.

13. Lien entre convexité et variations de f'

3.2 Convexité et signe de f''

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si la dérivée f' de f est elle aussi dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f' sur I .

f'' est appelée dérivée seconde de f .

Exemples :

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$

$$f'(x) = 6x - 3$$

$$f''(x) = 6$$

2. $f(x) = e^x - 2x$

$$f'(x) = e^x - 2$$

$$f''(x) = e^x$$

Exercices : -135, 136 page 164¹⁴ [Magnard]

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

— f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .

— f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I .

Remarque : Ce théorème est une conséquence directe de celui du 3.1.

Exercices : 15, 16 page 147; 76, 77, 79, 80 page 157; 93, 95, 97 page 158; 106, 107 page 159; 131 page 163 et 146 page 165¹⁵ - 23, 24 page 151¹⁶ [Magnard]

4 Convexité et tangente

4.1 Dérivée seconde et tangente

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Propriété : (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

Si f'' est positive sur I , alors la courbe \mathcal{C} est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration :

Soit $a \in I$. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Étudier les positions relatives de \mathcal{C} avec cette tangente revient donc à étudier, sur I , le signe de la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$$

La fonction Φ est dérivable sur I et $\Phi'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Comme f'' est positive sur I , la fonction f' est croissante sur I . On a donc :

Si $x \leq a$, $f'(x) \leq f'(a)$ donc $\Phi'(x) \leq 0$;

Si $x \geq a$, $f'(x) \geq f'(a)$ donc $\Phi'(x) \geq 0$;

et comme, de plus, $\Phi(a) = f(a) - f(a) = 0$, la fonction Φ a le tableau de variations suivant :

14. Complément : dérivée n -ième d'une fonction.

15. Lien entre convexité et signe de f''

16. Utiliser la convexité pour résoudre un problème.

x	a
$\Phi'(x)$	- 0 +
$\Phi(x)$	↘ 0 ↗

On en déduit donc que, pour tout $x \in I$, $\Phi(x) \geq 0$ et donc que la courbe \mathcal{C} est toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a .

Remarque : On vient donc de montrer que, si la fonction f est deux fois dérivable sur I , on a alors le résultat suivant :

Si f est **convexe** sur I alors, sur l'intervalle I , **la courbe \mathcal{C} est au-dessus de ses tangentes.**

Exercices : 69, 70, 71 page 156¹⁷ [Magnard]

4.2 Dérivée seconde et point d'inflexion

4.3 Point d'inflexion

Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

On dit que le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de \mathcal{C} si, en A , la courbe \mathcal{C} **traverse sa tangente.**

Exemple : La fonction cube $x \rightarrow x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine O du repère (voir figure 7). Elle est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

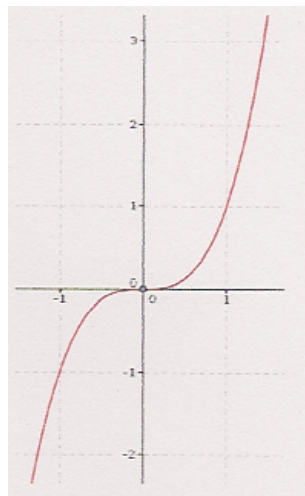


FIGURE 7 – La fonction cube

Exercices : 17, 18 page 149 et 81, 82 page 157¹⁸ [Magnard]

Théorème : (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

Si f'' s'annule en changeant de signe en a , c'est-à-dire que f' change de variation en a , alors La courbe \mathcal{C} admet un **point d'inflexion** au point $A(a; f(a))$.

Exercices : 19, 20 page 149; 83, 85 page 157; 98, 101, 102 page 159; 129 page 163 et 145, 148 page 165¹⁹ [Magnard]

17. Démontrer des inégalités en utilisant la convexité.

18. Lire les points d'inflexion sur une courbe.

19. Déterminer algébriquement un point d'inflexion.

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020 3, 4, 6, 7, 8, 9