Probabilités conditionnelles

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2024/2025

Table des matières

Table des figures

1 Probabilités conditionnelles – Arbre de probabilité

1.1 Rappels sur les probabilités conditionnelles

Exercice : 19 page 128[1] [Algomaths]

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé (ou, plus simplement, B sachant A) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques :

1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :

$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

2. $P_A(B)$ représente la probabilité de l'événement B dans l'univers A.

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Exercices : 2, 3 page 127 et 20 page 128[2] [Algomaths]

1.2 Arbre de probabilité

Activité : Activité 1 page 120[3] [Algomaths]

On utilise souvent un arbre de probabilités pour résumer une situation aléatoire donnée. Vous en trouverez un exemple sur la figure 1.

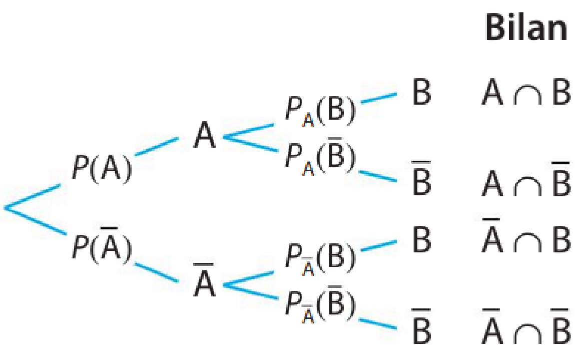

FIGURE 1 – Arbre de probabilités

Vocabulaire :
— Une branche est un segment reliant deux événements. À chaque branche, on associe la probabilité de l'événement qui y mène ;
— un noeud est un croisement de plusieurs branches ;
— un chemin est une succession de branches du noeud initial à une des extrémités de l'arbre ;

1. Vocabulaire des probabilités.
2. Probabilités conditionnelles.
3. Un drôle d'arbre.

— l'événement bilan, situé à l'extrémité du chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

Exemple : Sur la figure 1, le chemin $-\overline{A}-B$ correspond à l'événement bilan $\overline{A}\cap B$.
En utilisant la Propriété 1, on peut calculer sa probabilité :

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}\left(B\right)$$

Ce calcul revient à multiplier les probabilités sur les branches. Ce résultat se généralise.

Utilisation d'un arbre de probabilité :
— la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
— la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;
— la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités de tous les chemins qui y aboutissent .

Exemple : Sur la figure 1, la probabilités de l'événement B est égal à la somme des probabilités suivante :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right) \\ &= p(A)\times p_A(B)+p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

Vette formule est appelée formule des probabilités totales.

Exercices : 4, 5 page 127[4] – 6, 7 page 127 ; 16, 17 page 128[5] – 8, 9, 10, 12 page 127 ; 21 page 128[6] [Algomaths]

Activité : Activité 2 page 120[7] [Algomaths]

Exercices : 22 page 128 ; 36 page 131 ; 41 page 132 ; 72 page 138 et 75 page 139[8] – 37, 38 page 131[9] [Algomaths]

2 Événements indépendants

Activité : Activité 4 page 121[10] [Algomaths]

Définition : A et B deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$.
On dit que A et B sont indépendants si $P_A(B)=p(B)$ ou $P_B(A)=p(A)$.

Remarques :

1. Il suffit de vérifier une seule des deux égalités pour que les événements soient indépendants.
2. Deux événements sont donc indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de l'autre.

Propriété : A et B deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Remarque : Ceci est dû au fait que $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$, avec $P_A(B)=p(B)$.

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On note :

l'événement A : « la carte est une dame »
l'événement B : « la carte est un cœur »

On a : $p(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ et $p(B)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.
De plus, l'événement $A\cap B$ est « obtenir la dame de cœur » donc $p(A\cap B)=\frac{1}{32}$.
On a $p(A)\times p(B)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}=p(A\cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

4. Lire et compléter un arbre de probabilité.
5. Calculs de probabilités à partir d'un arbre.
6. Utilisation d'un arbre de probabilité.
7. Streaming et téléchargement.
8. Problèmes de probabilités conditionnelles.
9. QCM. Vrai-Faux.
10. L'indépendance.

Exercices : 13, 14, 15 page 127 ; 24, 27, 29 page 129 et 43, 44 page 132 [11] – 25, 26 page 129 et 42 page 132 [12] – 30, 33, 34 page 130 ; 47, 48 page 133 ; 73 page 138 et 74, 76 page 139 [13] [Algomaths]

Références

[Algomaths] Collection Algomaths, Maths enseignement commun, Tle Séries Techno, Delagrave, 2020. 2, 3, 4

11. Événements indépendants.
12. QCM. Vrai-Faux.
13. Exercices de synthèse.