Fonctions cosinus et sinus

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2024/2025

Table des matières

Table des figures

En préliminaire au cours :

Exercices : 1, 2, 3, 4, 5 page 81 [1] [Magnard]
Activité : 1 page 82 [2] [Magnard]

On pourra se référer aux deux fiches de rappels de Première : « Rappels de trigonométrie » et « Rappels : fonctions sinus et cosinus ».

1 Dérivation des fonctions sinus et cosinus

1.1 Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Théorème (admis)
Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Remarques :

1. Pour une idée de la démonstration, on pourra se référer à l'activité 1 page 82 [Magnard].
2. On a prouvé entre autres dans cette activité les deux résultats suivants :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Exercices : 15, 16 page 91 et 27, 28, 29 page 92 [3] – 18, 20 page 91 et 30, 31, 32, 34, 35 page 92 [4] – 1, 2 page 85 ; 18 page 91 et 40, 41 page 92 [5] – 59 page 155 [6] – 60 page 155 [7] [Magnard]

1.2 Tableau de variations des fonctions cosinus et sinus

Étude de la fonction cosinus : La fonction cosinus est périodique de période 2π, on peut donc limiter l'étude de cette fonction à un intervalle d'amplitude 2π. On prendra l'intervalle $I = [-\pi\,;\,\pi]$.

On note $f(x) = \cos x$.
f est dérivable sur I et $f'(x) = -\sin x$.
À l'aide du cercle trigonométrique, on a facilement le signe de $\sin x$:

x	$-\pi$		0		π
$\sin x$	0	$-$	0	$+$	0

On en déduit le tableau de variations de la fonction cosinus :

x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin x$	0	$+$	0	$-$	0
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

1. Rappels de trigonométrie.
2. Dériver les fonctions cosinus et sibus.
3. Valeurs remarquables
4. Périodicité
5. Calculs de dérivées.
6. Dérivées successives.
7. Fonctions composées.

Étude de la fonction sinus : La fonction sinus est périodique de période 2π, on peut donc limiter l'étude de cette fonction à un intervalle d'amplitude 2π. On prendra l'intervalle $I = [-\pi\,;\,\pi]$.

On note $g(x) = \sin x$.
g est dérivable sur I et $g'(x) = \cos x$.
À l'aide du cercle trigonométrique, on a facilement le signe de $\cos x$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de la fonction sinus :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1.3 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$, où u est une fonction

Propriété : Soit u une fonction dérivable et sur un intervalle I.
- La fonction f définie sur I par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$$

- La fonction g définie sur I par $g(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x)\cos(u(x))$$

Remarque : C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.
Exercices : 3, 4 page 85 et 42, 43 page 93 et 6 page 143 [8] – 90 page 158 [9] [Magnard]

1.4 Primitives des fonctions sinus et cosinus

On déduit facilement les résultats suivant de ceux sur la dérivation :

Propriétés :
1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = \cos x$ est $F(x) = \sin x$.
   Une primitive de la fonction $g(x) = \sin x$ est $G(x) = -\cos x$.
2. Soit u une fonction dérivable et sur un intervalle I.
   Une primitive sur I de la fonction f par $f(x) = u'(x)\cos(u(x))$ est $F(x) = \sin(u(x))$.
   Une primitive sur I de la fonction g par $g(x) = u'(x)\sin(u(x))$ est $G(x) = -\cos(u(x))$.

Exercices : 40 page 218 ; 54, 56(c) page 219 et 76 page 222 [10] –25, 26 page 215 [11] – 84 page 258 [12] [Magnard]

2 Résolution d'équations et d'inéquations

Pour résoudre les équations et inéquations comportant des cosinus et des sinus, il faut s'aider du cercle trigonométrique et bien avoir en tête les résultats de la fiche « *Rappels de trigonométrie* ».

8. Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$.
9. Dérivées successives.
10. Primitives des fonctions sinus et cosinus.
11. Équations différentielles de la forme $y' = ay + f$, où f est une fonction trigonométrique.
12. Calcul intégral.

2.1 Résolution d'équation trigonométrique

Propriété 1 : Résolutions d'équations

Pour les cosinus, on se référera à la figure 1 et pour les sinus à la figure 2.
Soit a un nombre réel.

$$\cos(x) = \cos(a) \iff x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

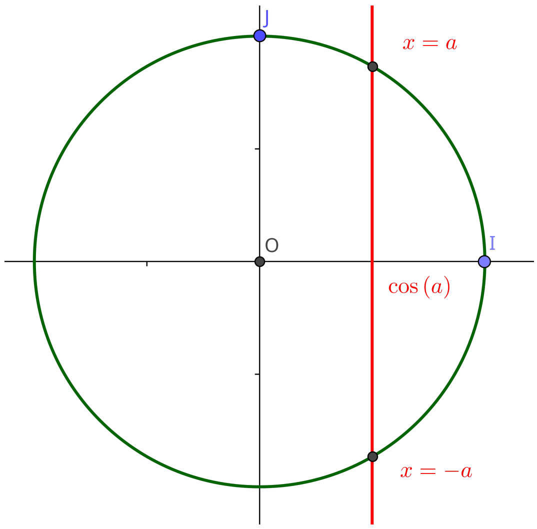

FIGURE 1 – Équations avec un cosinus

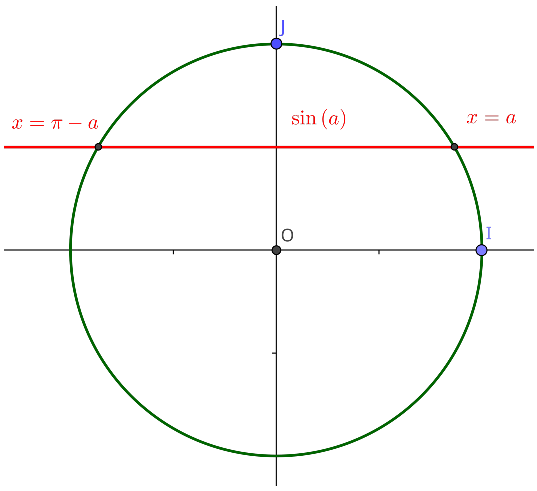

FIGURE 2 – Équations avec un sinus

Exemples :

1. Résoudre l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On obtient donc $S = \left\{x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Résoudre l'équation $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Reste à déterminer pour quelles valeurs de k dans $\mathbb{Z}$ pour lesquelles les solutions appartiennent à $]-\pi\,;\,\pi]$.

$$-\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \iff -\frac{7\pi}{6} < k\pi \leq \frac{5\pi}{6} \iff -\frac{7}{6} < k \leq \frac{5}{6} \iff k \in \{-1\,;\,0\} \iff x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\right\}$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \iff -\frac{5\pi}{6} < k\pi \leq \frac{7\pi}{6} \iff -\frac{5}{6} < k \leq \frac{7}{6} \iff k \in \{0\,;\,1\} \iff x \in \left\{-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right\}$$

On obtient donc $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{6}\,;\,-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Exercices : 5, 6 page 87 ; 45, 46 page 93 et 61, 65 page 95 [13] – 63 page 95 [14] – 66, 67 page 95 [15] [Magnard]

2.2 Résolution d'inéquation trigonométrique

Propriété 2 : Résolutions d'inéquations

Pour les cosinus, on se référera à la figure 3 et pour les sinus à la figure 4.
Soit a un nombre réel.

$$\cos(x) \geq \cos(a) \iff -a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) \leq \sin(a) \iff \pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

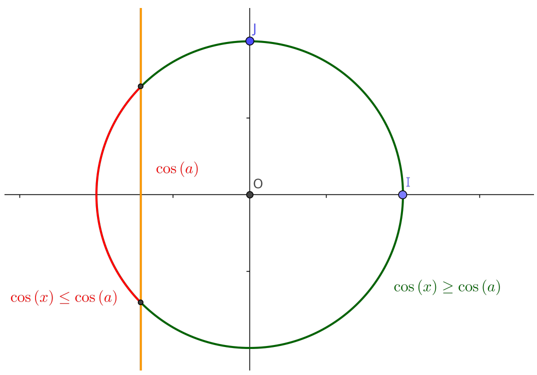

FIGURE 3 – Inéquations avec un cosinus

13. Résolutions d'équations.
14. Avec un changement de variable.
15. Lectures graphiques.

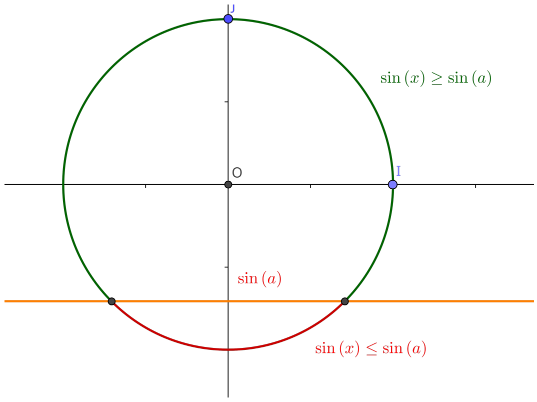

FIGURE 4 – Inéquations avec un sinus

Remarques :

1. Pour résoudre ces inéquations, il est essentiel de s'aider d'un cercle trigonométrique.
2. Pour étudier le signe de la dérivée d'une fonction contenant des cosinus ou des sinus, on sera souvent amenés à résoudre des inéquations de ce type.

Exemples :

1. Résoudre l'inéquation $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$.

   $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
   En s'aidant d'un cercle trigonométrique similaire à celui de la figure 4, on obtient :

   $$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

   Reste à déterminer pour quelles valeurs de k dans $\mathbb{Z}$ pour lesquelles les solutions appartiennent à $[0\,;\,2\pi[$.

   $$0 \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \iff -\frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi < \frac{4\pi}{3} \iff -\frac{1}{3} \leq k < \frac{2}{3} \iff k = 0 \iff x = \frac{2\pi}{3}$$

   $$0 \leq \pi + 2k\pi < 2\pi \iff -\pi \leq 2k\pi < \pi \iff -\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2} \iff k = 0 \iff x = \pi$$

   On obtient donc $S = \left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$.
2. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) < 0$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

   $\cos(2x) < 0 \iff \cos(2x) < \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   En s'aidant d'un cercle trigonométrique similaire à celui de la figure 3, on obtient :

   $$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \iff \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

   Reste à déterminer pour quelles valeurs de k dans $\mathbb{Z}$ pour lesquelles les solutions appartiennent à$]-\pi\,;\,\pi]$.

   $$-\pi < \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi \iff -\frac{5\pi}{4} < k\pi \leq \frac{3\pi}{4} \iff -\frac{5}{4} < k \leq \frac{3}{4} \iff k \in \{-1\,;\,0\} \iff x = -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4}$$

   $$-\pi < \frac{3\pi}{4} + k\pi \leq \pi \iff -\frac{7\pi}{4} < k\pi \leq \frac{\pi}{4} \iff -\frac{7}{4} < k \leq \frac{1}{4} \iff k \in \{-1\,;\,0\} \iff x = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}$$

   On obtient donc $S = \left]-\frac{3\pi}{4}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[$.

Exercices : 7, 8 page 87 ; 47, 48, 49 page 93 et 81 page 98 [16] – 11, 12, 14 page 89 et 62, 64 page 95 [17] – 9, 10 page 88 ; 50, 51, 53, 55, 58 page 94 ; 78 page 98 et 93 page 101 [18] – 69, 70 page 96 et 91 page 101 [19] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020 2, 3, 5, 7

16. Résolutions d'inéquations.
17. Avec un changement de variable.
18. Études de fonctions.
19. Modélisations.