Modèle continu
d'évolution linéaire

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2024/2025

Table des matières

Table des figures

En préliminaire au cours :

Exercices : 4, 7, 8 page 71 [1] – 6page 71 [2] [Déclic]

Activité : Situation 1 page 72 [3] [Déclic]

1 Les fonctions affines

1.1 Définition – Représentation graphique

Définition : Soit m et p deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une fonction affine.

Le coefficient m est appelé coefficient directeur.

Le coefficient p est appelé ordonnée à l'origine.

On dit qu'un phénomène qui peut être modélisé par une fonction affine suit une croissance linéaire.

Remarques :

1. Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine car $f(0) = p$.
2. — Si $m = 0$: $f(x) = p$, on obtient une fonction constante ;
   — Si $p = 0$: $f(x) = mx$, on obtient une fonction linéaire.

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$.
Cette droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Remarque : Pour tracer une droite, il suffit d'avoir deux points. On peut donc limiter, pour une fonction affine, le tableau de valeurs à deux (ou trois) pour tracer la droite représentant une fonction affine. Très souvent, un de ces points sera le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Cas particuliers :

— Si $f(x) = p$ (fonction constante), on obtient une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par l'ordonnée p ;
— Si $f(x) = mx$ (fonction linéaire), on obtient une droite passant par l'origine du repère.

Exercices : 21, 22 page 80 [4] – 26, 29 page 81 [5] [Déclic]

1.2 Sens de variation d'une fonction affine

Propriété : Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.
— Si $m > 0$ alors la fonction f est strictement croissante.
— Si $m = 0$ alors la fonction f est constante.
— Si $m < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante.

Exercices : 36, 37, 39 page 82 [6] – 31 page 81 [7] [Déclic]

1. Coefficient directeur et ordonnée àl'origine.
2. Intersection de droites
3. Population parisienne.
4. Phénomène continu de croissance linéaire.
5. Premiers résultats sur les fonctions affines.
6. Phénomènes continus de croissance linéaire.
7. Un problème de seuil.

2 Taux d'accroissement d'une fonction affine

2.1 Taux d'accroissement d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a, b deux nombres réels distincts.
On appelle taux d'accroissement de f entre a et b le nombre :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

2.2 Cas particulier des fonctions affines

Propriété : Soit f une fonction affine de la forme $f(x)=mx+p$.
Alors, pour toutes valeurs a et b, le taux d'accroissement de f entre a et b est égal au coefficient directeur m de f.
Autrement dit :

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarques :

1. Ceci peut se lire :

$$m=\frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Cela permet de déterminer entièrement une fonction affine connaissant deux images par cette fonction.

Exemple : Détermination de la fonction affine f telle que $f(-2)=1$ et $f(6)=5$.
On a $f(x)=mx+p$.

$$m=\frac{f(6)-f(-2)}{6-(-2)}=\frac{5-1}{6+2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Par suite, $f(x)=\frac{1}{2}x+p$. Pour déterminer l'ordonnée à l'origine p, il suffit de remarquer que $f(-2)=1$.
On a donc :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 1 \\ \frac{1}{2}\times(-2)+p &= 1 \\ -1+p &= 1 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

On obtient donc $f(x)=\frac{1}{2}x+2$.

Exercices : 42 page 83 et 35 page 82 [8] – 30, 32 page 81 et 43 page 83 [9] [Déclic]

2.3 Lecture graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine

La méthode est basée sur les deux remarques suivantes :

1. la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;p)$;
2. le coefficient directeur est donné par la formule : $m=\frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Méthode : (voir figure 1)

— Pour déterminer graphiquement le coefficient directeur :
 — on part d'un point de la droite (ici A) ;
 — on avance de Δx unités (horizontalement) et on monte de Δy unités (verticalement) pour se trouver sur un autre point de la droite (ici B).
 Le coefficient directeur est alors :

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$

— L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

8. Détermination d'une fonction affine par le calcul.
9. Phénomène continu de croissance linéaire.

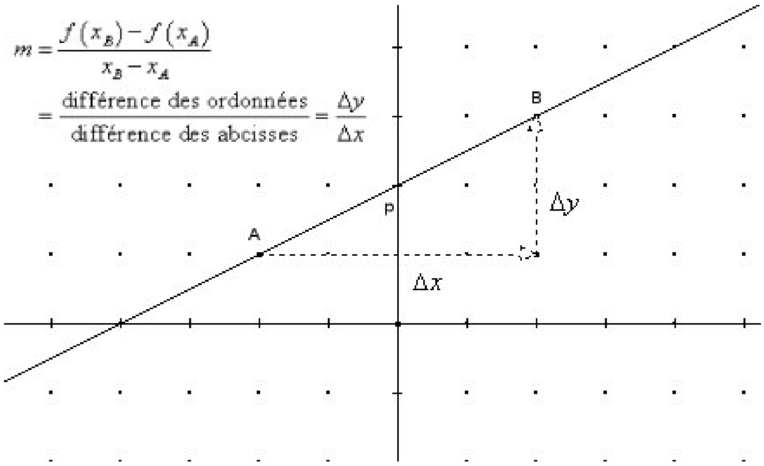

FIGURE 1 – Détermination graphique d'une fonction affine

Exemples :

1. Voir figure 2.

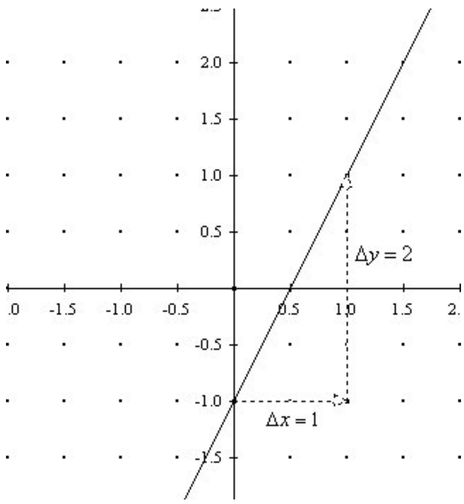

FIGURE 2 – Premier exemple de détermination graphique.

On pose $f(x) = mx + p$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,-1)$ donc $p = -1$.
Partant de ce point, il faut avancer de 1 unité ($\Delta x = 1$) et monter de 2 unités ($\Delta y = 2$) pour se trouver sur un autre point de la droite. On a donc : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$.
La fonction affine tracée est donc : $f(x) = 2x - 1$.

2. Voir figure 3.
On pose $f(x) = mx + p$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,2)$ donc $p = 2$.
Partant de ce point, il faut avancer de 2 unités ($\Delta x = 2$) et descendre de 1 unité ($\Delta y = -1$) pour se trouver sur un autre point de la droite. On a donc : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.
La fonction affine tracée est donc : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Remarque : Cette méthode permet aussi de tracer rapidement la représentation graphique d'une fonction affine connue.

Exercices : 24 page 80 ; 27, 28 page 81 [10] – 25 page 81 [11] [Déclic]

10. Détermination graphique d'une fonction affine.
11. Tracer une fonction affine.

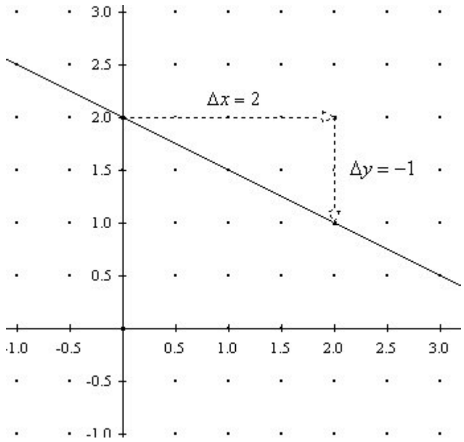

FIGURE 3 – Deuxième exemple de détermination graphique.

Références

[Déclic] Déclic 1ere , Maths Enseignement scientifique, Hachette éducation (édition 2023) 2, 3, 4