Activité : D'un histogramme à une courbe en cloche

X_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
On va utiliser GEOGEBRA pour visualiser l'histogramme de X_n puis pour le centrer

Partie A : Histogramme de X_n

1. (a) Créer un curseur n de 10 à 2 000 avec un incrément de 1 et un curseur p de 0 à 1 avec un incrément de $0,01$.
   (b) Afficher l'espérance m et l'écart-type s de la variable aléatoire X_n.
2. (a) Choisir une fenêtre d'affichage adaptée à l'histogramme de la variable aléatoire X_n.
   (b) Faire afficher cet histogramme en tapant dans la zone de saisie : `binomiale[n,p]`.
   (c) Déplacer les curseurs et observer l'histogramme (on pourra éventuellement changer la fenêtre d'affichage).
   Que peut-on en conclure ?

Partie B : Loi centrée réduite Z_n

On règle les curseurs à $n = 100$ et $p = 0,5$.
On considère la variable aléatoire :

$$Z_n = \frac{X_n - m}{s}$$

Z_n est appelée variable aléatoire centrée réduite associée à X_n.
On a donc ici :

$$Z_n = \frac{X_n - 50}{5}$$

1. (a) Calculer l'espérance et l'écart-type de Z_n.
   Que signifient les mots « centrée » et « réduite » ?
   (b) Expliquer pourquoi Z_n prend ses valeurs entre -10 et 10.
   Quel est l'écart entre deux valeurs consécutives prises par Z_n ?
2. On veut tracer l'histogramme représentant Z_n. Pour cela, chacun des rectangles doit avoir une aire égale à :

$$p(X_n = k) = p\left(Z_n = \frac{k-50}{5}\right)$$

   (a) Quelle est la largeur de chaque rectangle ? Quelle est alors sa hauteur ?
   (b) Pour tracer cet histogramme sous GEOGEBRA, taper successivement dans la zone de saisie :

   `séquence[(i-m)/s-0.5/s,i,0,n+1]` *(liste1 des bornes)*

   `séquence[s*binomiale[n,p,k,False],k,0,n]` *(liste2 des hauteurs)*

   `histogramme[liste1,liste2]`

   Faire en sorte que l'histogramme de X_n ne soit plus affiché et adapter la fenêtre d'affichage à l'histogramme de Z_n.
   (c) Que dire de la forme de cet histogramme ?

Partie C : une courbe « en cloche »

1. (a) Tracer sur le même graphique la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-0,5x^2}$$

   (b) Déplacer le curseur n. Que peut-on en déduire ?
2. On revient maintenant à $n = 100$ et $p = 0,5$.
   (a) Montrer que :

$$p(45 \leq X_n \leq 60) = p(-1 \leq Z_n \leq 2)$$

   (b) En déduire une méthode pour donner une approximation de $p(45 \leq X_n \leq 60)$ en utilisant la fonction f.